Pau juny 2018

A1

Siga el sistema d'equacions $\begin{cases} y - z = 1 - a \\ -x + z = 5 \\ -ax + y - z = 1 \end{cases}$, on a és un paràmetre real.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:
a) Els valors del paràmetre a per als quals el sistema és compatible determinat.
b) Les solucions del sistema quan $a = 3$.
c) Les solucions del sistema per als valors de a que el fan compatible indeterminat.

A2

Donats els punts $A(-1, 2, \lambda)$, $B(2, 3, 5)$, $C(3, 5, 3)$, on λ és un paràmetre real, obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:
a) El valor del paràmetre λ perquè el segment $\overline{AC}$ siga la hipotenusa d'un triangle rectangle de vèrtexs A, B i C.
b) L'àrea del triangle de vèrtexs A, B i C quan $\lambda = 6$.
c) L'equació del plànol que conté el triangle de vèrtexs A, B i C quan $\lambda = 6$.

A3

Es dóna la funció $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$. Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:
a) El domini i les asímptotes de la funció f(x).
b) Els intervals de creixement i de decreixement de la funció f(x).
c) L'àrea limitada per la corba $y = f(x)$, l'eix d'abscisses i les rectes $x = 2$ i $x = 3$.

B1

Siga A una matriu quadrada tal que $A^2 + 2 \cdot A = 3 \cdot I$, essent I la matriu identitat.
Calculeu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:
a) Els valors a i b perquè $A^{-1} = a \cdot A + b \cdot I$.
b) Els valors α i β perquè $A^4 = \alpha \cdot A + \beta \cdot I$
c) El determinant de la matriu $2 \cdot B^{-1}$, essent B una matriu quadrada d'ordre 3 amb determinant 2.

B2

Es donen el punt $A(5, 7, 3)$ i la recta $r \equiv \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{2}$. Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:
a) La recta s que talla la recta r i és perpendicular a la recta r.
b) La distància del punt A a la recta r.
c) La distància del punt $B(1, 1, 1)$ al plànol Π que passa per $(3, -1, 0)$ i és perpendicular a r.

B3

Es divideix un filferro de longitud 100 cm en dues parts. Amb una d'elles, de longitud x, es construeix un triangle equilàter i amb l'altra de longitud $100 - x$, es construeix un quadrat. Es demana obtenir raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

a) La funció de la variable x que expressa la suma de les àrees del triangle equilàter i del quadrat, essent $0 \leq x \leq 100$.
b) El valor de x a l'interval $[0, 100]$ per al qual l'esmentada funció (suma de les àrees en funció de x obtinguda a l'apartat a)) assoleix el seu mínim valor.
c) El valor de x a l'interval $[0, 100]$ per al qual l'esmentada funció assoleix el seu màxim valor. Interpretar el resultat obtingut.

A1

Siga el sistema d'equacions $\begin{cases} y - z = 1 - a \\ -x + z = 5 \\ -ax + y - z = 1 \end{cases}$, on a és un paràmetre real.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:
a) Els valors del paràmetre a per als quals el sistema és compatible determinat.
b) Les solucions del sistema quan $a = 3$.
c) Les solucions del sistema per als valors de a que el fan compatible indeterminat.

Solució:
Considerem la matriu de coeficients:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -a & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ |A| = -a.$$

a)
$|A| \neq 0$, si $a \neq 0$, en aquest cas $\text{rang}A = \text{rang}A' = \text{núm. incògnites} = 3$.

Aleshores si $a \neq 0$, el sistema és compatible determinat.

b)
Siga $a = 3$. $|A| = -3$. El sistema és de Cramer. Aplicant la regla de Cramer:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \dfrac{3}{-3} = -1 \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \dfrac{-6}{-3} = 2 \\ z = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \dfrac{-12}{-3} = 4 \end{cases}$$

c)
Si $a = 0$, $\text{rang}A < 3$.

Si considerem el menor format per 1ª i 2ª fila i 1ª i 2ª columna $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Aleshores, $\text{rang}A \geq 2$.

Per tant, $\text{rang}A = 2$.

Per calcular el rang de la matriu ampliada, calculem el determinant format per la 1ª, 2ª i 4ª columna de la matriu ampliada:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ Aleshores, } \text{rang}A' = 2.$$

$\text{rang}A = \text{rang}A' = 2 < \text{núm. incògnites} = 3$.

El sistema és compatible indeterminat.

La tercera equació depén de les dues primeres:

$\begin{cases} y - z = 1 \\ -x + z = 5 \end{cases}$. Resolent donant un valor a la incògnita z:

$\begin{cases} x = -5 + \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$.

A2

Donats els punts $A(-1, 2, \lambda)$, $B(2, 3, 5)$, $C(3, 5, 3)$, on λ és un paràmetre real, obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

a) El valor del paràmetre λ perquè el segment $\overline{AC}$ siga la hipotenusa d'un triangle rectangle de vèrtexs A, B i C.

b) L'àrea del triangle de vèrtexs A, B i C quan $\lambda = 6$.

c) L'equació del plànol que conté el triangle de vèrtexs A, B i C quan $\lambda = 6$.

Solució:

a)

A fi que el segment $\overline{AC}$ siga la hipotenusa d'un triangle rectangle de vèrtexs A, B i C, els vectors $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$ han de ser ortogonals.

$\overrightarrow{BA} = (-3, -1, \lambda - 5)$, $\overrightarrow{BC} = (1, 2, -2)$.

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $-3 - 2 - 2\lambda + 10 = 0$.

Resolent l'equació:

$$\lambda = \frac{5}{2}.$$

b)

Siga $\lambda = 6$, $\overrightarrow{BA} = (-3, -1, 1)$, $\overrightarrow{BC} = (1, 2, -2)$.

L'àrea del triangle $A\overset{\Delta}{B}C$ és $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right\|$.

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -5j - 5k = (0, -5, -5).$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + (-5)^2 + (-5)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}.$$

c)

Siga $\lambda = 6$.

El plànol que cerquem te per vector característic $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = (0, -5, -5)$.

Considerem el feix de plànol:

$\Pi_D \equiv -5y - 5z + D = 0$.

El punt B pertany al plànol, aleshores:

$-5 \cdot (3) - 5 \cdot 5 + D = 0$.

Resolent l'equació:

$D = 40$.

L'equació del plànol que conté A, B i C és:

$-5y - 5z + 40 = 0$. O bé simplificant:

$y + z - 8 = 0$.

A3

Es dóna la funció $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$. Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

a) El domini i les asímptotes de la funció f(x).

b) Els intervals de creixement i de decreixement de la funció f(x).

c) L'àrea limitada per la corba $y=f(x)$, l'eix d'abscisses i les rectes $x=2$ i $x=3$.

Solució:

a)

No hi ha domini quan el denominar de la fracció és zero:

$\text{Dom } f(x)=R-\{x/\ x^2-x=0\}=R-\{0,1\}$.

Les asímptotes vertical són les rectes $x=0$, $x=1$.

Calculem la tendència d'aquestes asímptotes:

$x=0$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2-x}=-\infty,\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2-x}=+\infty$$

$x=1$.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x^2-x}=+\infty,\quad \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x^2-x}=-\infty$$

Té asímptotes horitzontals ja que el grau del numerador és menor que el grau del denominador.

L'asímptota horitzontal és $y=0$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^2-x}=0,\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x^2-x}=0.$$

En totes dues asímptotes la corba va per dalt de la recta asímptota.

b)

Per estudiar els intervals de creixement i de decreixement estudiarem el signe de la primera derivada:

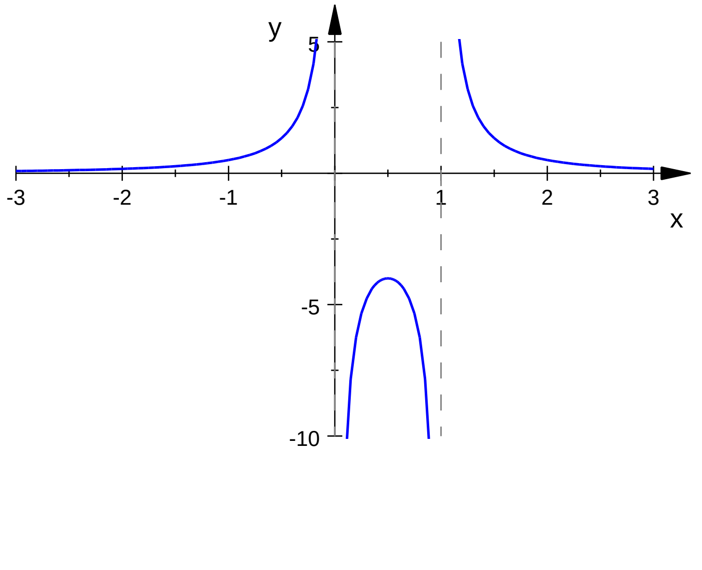
$f'(x)=\dfrac{-2x+1}{(x^2-x)^2}$. Notem que el denominador és positiu.

$f'(x)>0$, quan $-2x+1>0$.

Resolent la inequació, quan $x<\dfrac{1}{2}$, és a dir, quan $x\in\left[-\infty,\dfrac{1}{2}\right]-\{0\}$

$f'(x)<0$, quan $-2x+1<0$.

Resolent la inequació, quan $x>\dfrac{1}{2}$, és a dir, quan $x\in\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right]-\{1\}$



c)

La funció és definida positiva en l'interval $[2,3]$.

La fracció algebraica té arrels reals simples.

$\frac{1}{x^2-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}$. Calculem els valors A i b:

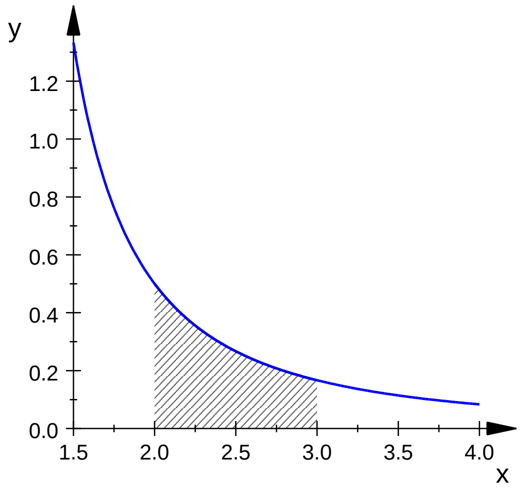
$1=A(x-1)+Bx$.

Si $x=0$, $-A=1$, és a dir, $A=-1$.

Si $x=1$, $B=1$.

$$\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)dx=-\ln|x|+\ln(x-1)+C.$$

$$\int_2^3\left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)dx=\left(-\ln|x|+\ln(x-1)\right)\Big]_2^3=-\ln 3+2\ln 2\approx 0.2877.$$



B1

Siga A una matriu quadrada tal que $A^2 + 2 \cdot A = 3 \cdot I$, essent I la matriu identitat. Calculeu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

a) Els valors a i b perquè $A^{-1} = a \cdot A + b \cdot I$.

b) Els valors α i β perquè $A^4 = \alpha \cdot A + \beta \cdot I$

c) El determinant de la matriu $2 \cdot B^{-1}$, essent B una matriu quadrada d'ordre 3 amb determinant 2.

Solució:

a)

$A^2 + 2 \cdot A = 3 \cdot I$

$A(A + 2 \cdot I) = 3 \cdot I$.

Calculant determinants:

$\det(A(A + 2 \cdot I)) = \det(3 \cdot I)$.

$\det A \cdot \det(A + 2I) = 3$. Aleshores, $\det A \neq 0$.

Per tant, la matriu A té inversa.

Dividint l'expressió $A(A + 2I) = 3 \cdot I$:

$A\left(\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I\right) = I$.

Aleshores, $A^{-1} = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I$. Per tant, $\begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

b)

$A^2 = -2 \cdot A + 3 \cdot I$. Multiplicant, a l'esquerra, l'expressió per A:

$A^3 = -2 \cdot A^2 + 3 \cdot A$.

$A^3 = -2(-2 \cdot A + 3 \cdot I) + 3 \cdot A = 7 \cdot A - 6 \cdot I$. Multiplicant, a l'esquerra, l'expressió per A:

$A^4 = 7 \cdot A^2 - 6 \cdot A$.

$A^4 = 7 \cdot (-2 \cdot A + 3 \cdot I) - 6 \cdot A = -20 \cdot A + 21 \cdot I$. Per tant, $\begin{cases} \alpha = -20 \\ \beta = 21 \end{cases}$.

c)

$\det B = 2$.

$B \cdot B^{-1} = I$.

$\det(B \cdot B^{-1}) = \det(I) = 1$

$\det B \cdot \det B^{-1} = I$.

Aleshores, $\det B^{-1} = \frac{1}{2}$.

$\det(2B^{-1}) = \det(2 \cdot I \cdot B^{-1}) = \det(2 \cdot I) \cdot \det B^{-1} = 2^3 \frac{1}{2} = 4$.

B2

Es donen el punt $A(5, 7, 3)$ i la recta $r \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$. Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

a) La recta s que talla la recta r i és perpendicular a la recta r.
b) La distància del punt A a la recta r.
c) La distància del punt $B(1,1,1)$ al plànol Π que passa per $(3, -1, 0)$ i és perpendicular a r.

Solució:

a)

La recta r passa pel punt $P(3, -1, 0)$ i té vector director $v = (-1, 3, 2)$.
La recta s passa pel punt A i pel punt projecció de A sobre la recta r.
Determinem el plànol Ω que passa per A i és perpendicular a r.
El vector característic és el vector director $v = (-1, 3, 2)$ de la recta r.
$\Omega \equiv -x + 3y + 2z + D = 0$. El punt A pertany a plànol.
$-5 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 3 + D = 0$.
Resolent l'equació, $D = -22$.
$\Omega \equiv -x + 3y + 2z - 22 = 0$
El punt projecció és la intersecció de la recta r i el plànol Ω.

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 3 - \alpha \\ y = -1 + 3\alpha \\ z = 2\alpha \end{cases} \\ -x + 3y + 2z - 22 = 0 \end{cases}.$$

$-(3 - \alpha) + 3(-1 + 3\alpha) + 2 \cdot 2\alpha - 22 = 0$.
Resolent l'equació, $\alpha = 2$.
El punt projecció té coordenades $A_0(1, 5, 4)$.
$\overrightarrow{AA_0} = (-4, -2, 1)$.
La recta s passa pel punt A i té vector director $\overrightarrow{AA_0} = (-4, -2, 1)$. La seua equació és:
$s \equiv (x, y, z) = (5, 7, 3) + \lambda(-4, -2, 1)$.

b)

La distància de A a la recta r és igual a la distància entre els punts A i $A_0(1, 5, 4)$.
$d(A, r) = d(A, A_0) = \left\|\overrightarrow{AA_0}\right\| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{21}$.

c)

Determinem l'equació del plànol Π que passa per $(3, -1, 0)$ i és perpendicular a r.
El vector característic del plànol és el vector director $v = (-1, 3, 2)$ de la recta r.
El vector característic és el vector director $v = (-1, 3, 2)$ de la recta r.
$\Pi \equiv -x + 3y + 2z + D = 0$. El punt $(3, -1, 0)$ pertany a plànol.
$-3 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + D = 0$.
Resolent l'equació, $D = 6$.
$\Pi \equiv -x + 3y + 2z + 6 = 0$.
La distancia del punt $B(1,1,1)$ al plànol $\Pi \equiv -x + 3y + 2z + 6 = 0$ és:

$$d(B, \Pi) = \left| \frac{-1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 6}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2}} \right| = \frac{10}{\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{14}}{7}.$$

B3

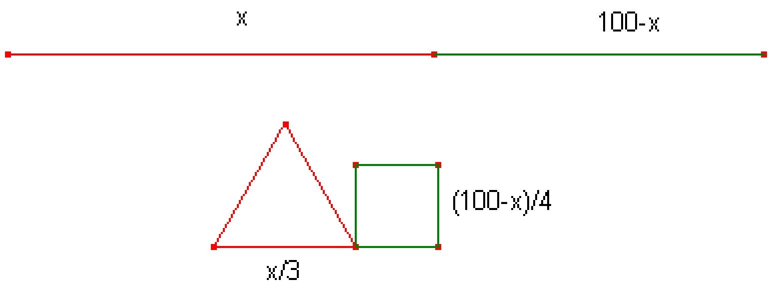
Es divideix un filferro de longitud 100 cm en dues parts. Amb una d'elles, de longitud x, es construeix un triangle equilàter i amb l'altra de longitud $100-x$, es construeix un quadrat. Es demana obtenir raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

a) La funció de la variable x que expressa la suma de les àrees del triangle equilàter i del quadrat, essent $0 \le x \le 100$.

b) El valor de x a l'interval $[0, 100]$ per al qual l'esmentada funció (suma de les àrees en funció de x obtinguda a l'apartat a)) assoleix el seu mínim valor.

c) El valor de x a l'interval $[0, 100]$ per al qual l'esmentada funció assoleix el seu màxim valor. Interpretar el resultat obtingut.

Solució:



El costat del triangle equilàter és $\frac{x}{3}$. L'àrea del triangle equilàter de costat $\frac{x}{3}$ és: $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x}{3}\right)^2$.

El costat del quadrat de costat $\frac{100-x}{4}$ és: $\left(\frac{100-x}{4}\right)^2$.

a)

La funció suma de les dues àrees és:

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{36}x^2 + \frac{10000 - 200x + x^2}{16}.$$

$$f(x) = \frac{1}{144}\left(\left(4\sqrt{3}+9\right)x^2 - 1800x + 90000\right), \ x \in [0, 100].$$

La funció és una paràbola còncava.

b)

El mínim s'assoleix en el vèrtex de la paràbola.

$$x = \frac{1800}{2\left(4\sqrt{3}+9\right)} = \frac{300\left(9-4\sqrt{3}\right)}{11} \approx 56.50 \text{ cm}.$$

b)

El màxim de les àrees s'assoleix en algun dels extrems (o bé totsdós) dels extrems del domini.

$f(0) = 625$.

$$f(100) = \frac{2500\sqrt{3}}{9} \approx 481.13$$

El màxim s'assoleix quan $x = 0$, no tallem el fill i construïm un quadrat.

El polígon regular de major àrea d'entre dos que tenen el mateix perímetre és el que té major nombre de costats.