Problemes d'Àlgebra

Problema 1
Considereu el sistema donat per $AX = B$.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha - 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

a) Determineu, si existeixen, els valors de α perquè el sistema tinga solució única.
b) Determineu, si existeixen, els valors de α perquè el sistema no tinga solució.
c) Determineu, si existeixen, els valors de α perquè el sistema tinga almenys dues solucions.
Calcula totes les solucions en els casos possibles.
Andalusia 2015 a1.

Problema 2
Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
a) Calculeu la matriu X que verifica $AX - B = I$ (I denota la matriu identitat d'ordre 3).
b) Calculeu el determinant de la matriu $\left(A^2B^{-1}\right)^{2015}$.
Andalusia 2015 a1.

Problema 3
Consideren les següents matrius:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calculeu la matriu X tal que $A^tXB^{-1} = C$. (A^t és la transposada de A).
b) Calculeu el determinant de $B^{-1}\left(C^tC\right)B$. (C^t és la transposada de C).
Andalusia 2015 a3.

Problema 4
Considerem el següent sistema d'equacions: $\begin{cases} 2x + y + (\alpha - 1)z = \alpha - 1 \\ x - \alpha y - 3z = 1 \\ x + y + 2z = 2\alpha - 2 \end{cases}$
a) Resoleu el sistema per a $\alpha = 1$.
b) Determineu, si existeix, el valor de α perquè $(x, y, z) = (1, -3, \alpha)$ és l'única solució del sistema donat.
Andalusia 2015 a3.

Problema 5
Considereu el següent sistema d'equacions: $\begin{cases} \lambda x + y - z = -1 \\ \lambda x + \lambda z = \lambda \\ x + y - \lambda z = 0 \end{cases}$
a) Discutiu el sistema segons els valors de λ.
b) Resoleu el sistema per a $\lambda = 0$.
Andalusia 2015 a4.

Problema 6
Considereu les matrius
$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & m\end{pmatrix} \text{ i } B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & m & 0\\ 3 & 2 & m\end{pmatrix}.$$
a) Determineu el valor o els valors de m a fi que A i B tinguen el mateix rang.
b) Determineu, si existeixen, els valors de m a fi que A i B tinguen el mateix determinant.
Andalusia 2015 a4.

Problema 7
Considereu les matrius:
$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & -3 & 0\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \text{ i } BA=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -5 & -3\end{pmatrix}.$$
Calculeu la matriu X que verifica la igualtat $AXA^{-1}+B=CA^{-1}$.
Andalusia 2015 a5.

Problema 8
Considereu el següent sistema d'equacions:
$$\begin{cases}\lambda x+\lambda y+\lambda z=0\\ \lambda x+2y+2z=0\\ \lambda+2y+z=0\end{cases}.$$
a) Discutiu el sistema segons els valors de λ.
b) Determineu, si existeixen, els valors de λ a fi que el sistema tinga alguna solució en què $z\neq 0$
Andalusia 2015 a5.

Problema 9
Considereu la matriu $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & m\\ m-1 & 0 & 2\\ 0 & 1-m & 0\end{pmatrix}$.
a) Determineu el valor, o els valors, de m a fi que la matriu tinga rang 2.
b) Per a $m=1$, calculeu A^{2015}.
Andalusia 2015 a6.

Problema 10
Considereu el següent sistema d'equacions: $\begin{cases}x+\alpha z=2\\ 2x+\alpha y=\alpha+4\\ 3x+y+(\alpha+4)z=7\end{cases}$
a) Discutiu el sistema segons els valors de α.
b) Resoleu el sistema per a $\alpha=2$.
Andalusia 2015 a6.

Problema 11

Considereu el següent sistema d'equacions: $\begin{cases} \alpha x + y + 3z = 4 \\ x + y - 2z = -2 \\ -x + 2y + (3+\alpha)z = 4 + \alpha \end{cases}$

a) Determineu, si existeixen, els valors de α perquè el sistema tinga solució única.
b) Determineu, si existeixen, els valors de α perquè el sistema tinga almenys dues solucions.
Calcula totes les solucions en els casos possibles.
Andalusia 2015 m6.

Problema 12

Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculeu el determinant d'una matriu X que verifique la igualtat $X^2AX = B$.
b) Determineu, si existeix, la matriu Y que verifique la igualtat $A^2YB^{-1} = A$.
Andalusia 2015 m6.

Problema 13
a) Discutiu per a quins valors de a el sistema següent és compatibble:

$$\begin{cases} ax + y + z = a^2 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - y - z = 1 \\ 6x - y + z = 3a \end{cases}$$

b) Resoleu-lo en el cas (o els casos) en què siga compatible.
Balears 2015.

Problema 14
a) Demostreu que l'equació matricial següent no té solució. Indicació: agafeu determinants).

$AB - A = C$, on $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Resoleu l'equació matricial $AB - A = C$ quan $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Balears 2015.

Problema 15

Considereu el sistema d'equacions lineals següent: $\begin{cases} -3x + 2y + 3z = 0 \\ (a-2)y - 3z = 0 \\ -x - y + (-a-3)z = 0 \end{cases}$.

a) Calculeu per a quins valors del paràmetre a el sistema té més d'una solució.
b) Resoleu el sistema per al cas $a = -3$.
Catalunya 2015. sèrie 2.

Problema 16
Responeu a les qüestions següents:

a) Calculeu la matriu de la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ que satisfà $A^2 - A = I$, en què I és la matriu identitat, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Calculeu A^{-1} i comproveu que el resultat es correspon amb el que obteniu de deduir la matriu A^{-1} a partir de la igualtat $A^2 - A = I$.

Catalunya 2015. sèrie 2.

Problema 17

Considerem els sistema d'equacions $\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ -mx + 3y + z = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$, en què m és un paràmetre real.

a) Discutiu el sistema per als distints valors del paràmetre m.

b) Resoleu el sistema per a $m = 1$.

Catalunya 2015. sèrie 4.

Problema 18

Siga A una matriu quadrada que compleix que $A^3 = I$, en què I és la matriu identitat, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Demostreu que la matriu A té inversa i que $A^{-1} = A^2$.

b) En el cas de $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, calculeu si hi ha cap valor del paràmetre a per al qual $A^3 = I$.

Catalunya 2015. sèrie 4.

Problema 19

Considereu el sistema d'equacions $\begin{cases} 3x - ay = -3 \\ 2x + ay - 5z = 13 \\ x + 3y - 2z = 5 \end{cases}$.

a) Estudieu la seua compatibilitat per als distints valors del paràmetre a.

b) Resoleu el sistema per al cas $a = 3$.

Canàries 2015.

Problema 20

Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & -k & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 12 \end{pmatrix}$.

a) Per a quins valors del paràmetre k la matriu A té matriu inversa?.

b) Calculeu la matriu A^{-1} per a $k = 1$.

Canàries 2015.

Problema 21

Considereu el següent sistema dependent del paràmetre t: $\begin{cases} tx + y + tz = t \\ x + ty + z = -t \\ y + tz = 0 \end{cases}$.

a) Analitzeu l'existència de solucions depenent del valor del paràmetre t.
b) Calculeu totes les solucions en el cas de $t = 2$.
Cantàbria 2015.

Problema 22

Considerem la matriu $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -4 & 6 & 3 \\ 6 & -7 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Determineu tots els vectors $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tal que $Av = v$.

b) Calculeu la matriu inversa de A.
Cantàbria 2015.

Problema 23
Resoleu X de l'equació matricial $X \cdot A + B = X$, on A, B i X són matrius quadrades d'ordre 3, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Castella la Manxa 2015.

Problema 24
He pensat un nombre de tres xifres tal que la xifra de les desenes és la mitja aritmètica de les altres dues. A més a més, si al nombre li restem el que resulta d'invertir les seues xifres, la diferència és 198. Per últim, les tres xifres del nombre sumen 12.
a) Plantegeu un sistema d'equacions lineals que recullga la informació anterior i classifiqueu-lo. Per fer-ho et pot ser útil observar que el nombre la xifra x de les centenes, la xifra y de les desenes, i la xifra z de les unitats pot expressar-se $100x + 10y + z$.
b) Determineu, si el problema té solució, el nombre de tres xifres que he pensat.
Castella la Manxa 2015.

Problema 25

Considereu el sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ (a+3)y = 0 \\ (a+2)z = 1 \end{cases}$.

a) Discutiu el sistema segons els valors del paràmetre a.
b) Resoleu-lo quan siga possible.
Castella i Lleó 2015.

Problema 26

Considerem la matriu $M=\begin{pmatrix} a(a-4) & a-4 \\ a-4 & a(a-4) \end{pmatrix}$.

a) Calculeu el rang de M en funció del paràmetre a.

b) Per a $a=1$, resoleu l'equació $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=-6\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Castella i Lleó 2015.

Problema 27

a) Discutiu, segons els valors de m, el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} 4x+3y+(m-1)z=0 \\ x-2y+mz=1 \\ 5x+my+z=1 \end{cases}.$$

b) Resoleu els sistema anterior per al cas $m=1$.

Madrid 2015.

Problema 28

Donades les matrius $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, es demana:

a) Calculeu A^{15} i A^{20}.

b) Resoleu l'equació matricial $6X=B-3AX$, on X és una matriu quadrada d'ordre 3.

Madrid 2015.

Problema 29

Discutiu en funció del paràmetre b, el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x+y=b \\ -2x-y+(b+1)z=-2 \\ bx+y-z=2 \end{cases}.$$ No és necessari resoldre'l.

Extremadura 2015.

Problema 30

Determineu la relació que ha d'existir entre els paràmetres x i y a fi que les matrius $A=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$ commuten, és a dir, que $A\cdot B=B\cdot A$

Extremadura 2015.

Problema 31

a) Discutiu, segons els valors de m, el sistema: $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+my+3z=m \\ 2x+3y+mz=3 \end{cases}$.

b) Resoleu el sistema anterior per a $m=2$.

Galícia 2015.

Problema 32

a) Determineu els possibles valors a, b, c a fi que la matriu $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ verifique la relació $(A-2I)^2=O$, essent I la matriu identitat d'ordre 2 i O la matriu nul·la d'ordre 2.

b) Quina és la solució d'un sistema homogeni de dues equacions amb dues incògnites si la matriu de coeficients és $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ verificant la relació $(A-2I)^2=O$?

c) Per a $a=b=c=2$, calculeu la matriu X que verifica $A\cdot X=A^{-1}\cdot B$, essent $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Galícia 2015.

Problema 33

Per a cada nombre real a, la matriu $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ té determinant $|A|=(a-1)^3$.

A partir d'aquest fet, determineu el determinat de les següents matrius:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 2a & 2 & 2 & 2 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La Rioja 2015.

Problema 34

Discutiu el següent sistema d'equacions, segons el valor de α i resoleu-lo quan siga compatible determinat:

$$\begin{cases} x+y+z=2\alpha-1 \\ 2x+y+\alpha z=\alpha \\ x+\alpha y+z=1 \end{cases}.$$

La Rioja 2015.

Problema 35

Determineu els valors de $t\in R$ a fi que el determinant de la matriu AB siga 0, essent

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 0 & 1+t & 3 \end{pmatrix} \text{ i } B=\begin{pmatrix} 2+t & -1 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 4 & 7 & t \end{pmatrix}.$$

Navarra 2015.

Problema 36

Estudia el següent sistema d'equacions lineals dependents del paràmetre real α i resoleu-lo en els casos en què és compatible:

$$\begin{cases} \alpha x-y=0 \\ -2\alpha x+\alpha^2 y+\alpha z=-2\alpha \\ -\alpha x+\left(\alpha^2-1\right)y+(\alpha+1)z=-\alpha-2 \end{cases}.$$

Navarra 2015.

Problema 37

Siga A una matriu quadrada d'ordre 3 amb elements reals tal que $A^2 = I_3$, on I_3 és la matriu identitat d'ordre 3.

a) Proveu que la matriu A té inversa i calculeu la matriu inversa..

b) Obteniu A^n per a qualsevol nombre natural n.

c) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, calculeu el valor del nombre real a perquè $A^2 = I_3$.

Astúries 2015.

Problema 38

Donat el sistema $\begin{cases} x+y+z=2 \\ ax+2y+3z=0 \\ a^2x+4y+9z=-12 \end{cases}$.

a) Estudieu la compatibilitat segons els valors del nombre real a.

b) Resoleu el sistema, si és possible, quan $a=3$.

Astúries 2015.

Problema 39

a) Discutiu el següent sistema d'equacions en funció del paràmetre a $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=a \\ ax+y+z=1 \end{cases}$.

b) Si és possible, resoleu-lo per al valor $a=-2$.

Múrcia 2015.

Problema 40

Una matriu quadrada A s'anomena **involutiva** si compleix que $A^2 = I$, on I és la matriu identitat.

a) Justifiqueu raonadament que tota matriu involutiva és regular (invertible).

b) Determineu per a quins paràmetres a i b la següent matriu és involutiva:

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Múrcia 2015.