Problemes d'Anàlisi

Càlcul diferencial

Problema 1

Siga $f: R \to R$ la funció donada per $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Determineu els coeficients a, b, c, d sabent que f té un extrem local en el punt d'abscissa $x = 0$, que $(1, 0)$ és un punt d'inflexió de la gràfica de f, i que el pendent de la recta tangent en haches punt és -3.

Andalusia 2015 a1

Problema 2

Siga $f: R \to R$ la funció donada per $f(x) = x^2 - |x|$.

a) Estudieu la derivabilitat de la funció f.

b) Determineu els intervals de creixement i de decreixement de f.

c) Calculeu els extrems relatius de f (abscisses on s'obtenen i valors que assoleixen).

Andalusia 2015 a1

Problema 3

Determineu els valors a, b i c sabent que la gràfica de la funció $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{x + c}$ té una asímptota vertical en $x = 1$, una asímptota obliqua de pendent 2, i un extrem local en el punt d'abscissa $x = 3$.

Andalusia 2015 a3.

Problema 4

Un granger desitja tancar en un terreny rectangular adjacent a un riu.

El terreny ha de tindre $180000m^2$. Quines dimensions ha de tindre el terreny rectangular a fi que utilitze la mínima quantitat de tanca, si el costat que dóna al riu no necessita tanca.

Andalusia 2015 a3.

Problema 5

Volem construir un dipòsit obert de base quadrada i parets verticals amb un volum de 13'5 metres cúbics. Per a construir-lo disposem d'una xapa d'acer de grosor uniforme. Calculeu les dimensions del dipòsit a fi que les despeses en xapa siguen mínimes.

Andalusia 2015 a4.

Problema 6

Sabent que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ax^2 + bx + 1 - \cos x}{\sin(x^2)}$ és finit i igual a 1, determineu els valors de a i b.

Andalusia 2015 a4.

Problema 7

Volem tancar un camp rectangular que està junt a un camí.

Si la tanca del costat del camí costa 80 euros/metre i la dels altres costat 10euros/metre, determineu les mesures del camp d'àrea màxima que es pot tancar amb 28800 euros.

Andalusia 2015 a5.

Problema 8
Determineu a i b sabent que $b > 0$ i que la funció $f : R \to R$ definida per

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \cos(x) + 2x & \text{si } x < 0 \\ a^2 \cdot \ln(x+1) + \dfrac{b}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$ és derivalble.

Andalusia 2015 a5.

Problema 9
Determineu a i b sabent que és contínua la funció $f : R \to R$ definida com:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + \cos(x) - a \cdot e^x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ b & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Andalusia 2015 a6.

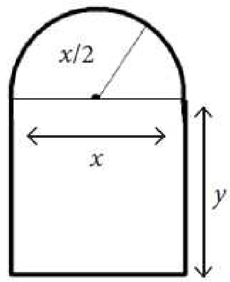
Problema 10
Siga $f : R \to R$ la funció donada per $f(x) = \left(x^2 + 3x + 1\right)e^{-x}$.
a) Estudieu i calculeu les asímptotes de la gràfica de f.
b) Determineu els punts de la gràfica de f la recta tangent de la qual és horitzontal.
c) Determineu l'equació de la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa $x = 0$.
Andalusia 2015 a6.

Problema 11
Siga f la funció definida per $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$ per a $x \neq 1$.
a) Estudieu i calculeu les asímptotes de la gràfica de f.
b) Determineu els intervals de creixement i decreixement i els extrems relatius (abscisses on s'obtenen i valors on s'assoleixen) de f.
Andalusia 2015 m6.

Problema 12
Determineu els valors a, b i c perquè la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ passe pel punt $(1, 0)$, tinga un màxim relatiu en $x = -1$ i un mínim relatiu en $x = 0$.
Balears 2015.

Problema 13
a) Demostreu que $x = 0$ és l'única arrel de l'equació:
$5x^9 + 3x^5 + 7x = 0$.
b) Demostreu que $x = 0$ és l'única arrel de l'equació:
$e^x = 1 + x$.
Balears 2015.

Problema 14
La portalada d'una catedral està formada, en la part superior, per un arc de mitja circumferència que recolza sobre dues columnes, com il·lustra la figura adjunta, en que x és el diàmetre de la circumferència, és a dir, la distància entre columnes, i y és l'alçaria de cada columna.



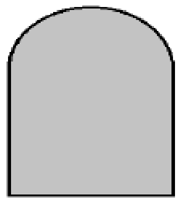
a) Comproveu que la funció $f(x,y) = \frac{\pi x^2}{8} + xy$ determina l'àrea d'aquesta portalada.
b) Si el perímetre de la portalada fa 20 m, determineu les mesures x i y de la portalada que maximitzen l'àrea.
Catalunya 2015 sèrie 2

Problema 15
Siga la funció $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.
a) Determineu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = 1$.
b) Calculeu les abscisses dels punts de la gràfica en què hi ha un mínim relatiu, un màxim relatiu o una inflexió.
Catalunya 2015 sèrie 4

Problema 16
Considerem la funció $f(x) = \ln(x-1)$ definida en l'interval $[2, e+1]$.
Determineu l'equació de la recta tangent a la corba $f(x) = \ln(x-1)$ que siga paral·lela a la recta que passa pels punts $P(2, 0)$, $Q(e+1, 1)$.
Canàries 2015.

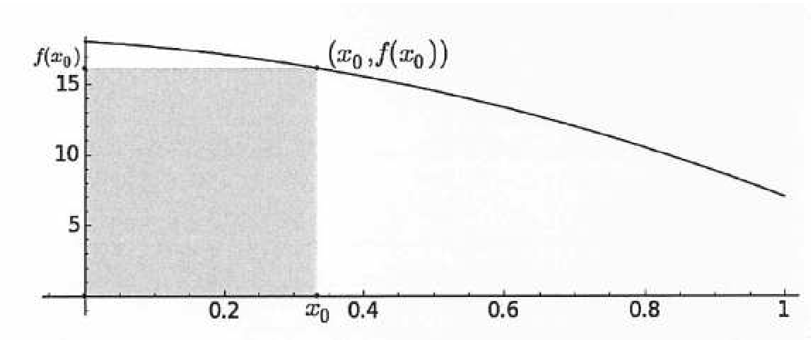
Problema 17
Considerem la funció $f(x) = \begin{cases} 2^x + a & \text{si } x \le -1 \\ ax + b & \text{si } -1 < x \le 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.
Determineu els valors dels paràmetres a i b a fi que f(x) siga derivable en tot R. Justifiqueu la resposta.
Canàries 2015.

Problema 18
La boca d'un túnel té forma d'un rectangle coronat per un semicercle com mostra la figura.
Determineu les mesures del túnel que deixe passar més llum si el perímetre de la figura mesura 4 metres.
Canàries 2015.



Problema 19
Considerem la funció $f(x) = \left(1 + x^2\right)^{(1/x)}$.
a) Calculeu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
b) Calculeu la derivada de f(x).
Cantàbria 2015.

Problema 20
Considerem el rectangle els vèrtexs del qual són: $(0, 0)$, $(x_0, 0)$, $(x_0, f(x_0))$ $(0, f(x_0))$, tal com indica la figura, on $0 \le x_0 \le 1$ i $f(x) = 18 - 3x - 8x^2$.
Calculeu el valor de x_0 perquè l'àrea del rectangle siga màxima. Calculeu l'àrea d'aquest rectangle.



Cantàbria 2015.

Problema 21
Donada la funció $f(x) = e^{\sin(x)} + x^2 + ax + b$, $a, b \in R$.
a) Determineu els paràmetres $a, b \in R$ sabent que la gràfica de f(x) passa pel punt $(0, 2)$ i que en aquest punt té un extrem relatiu.
b) Per als valors dels paràmetres trobats, estudieu si l'extrem relatiu és un màxim o un mínim.
Castella la Manxa 2015

Problema 22
Calculeu el domini i les asímptotes de les funcions següents:
$$f(x) = \frac{\sqrt{2x} - x}{x - 2}, \qquad g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4x + 4}.$$
Castella la Manxa 2015

Problema 23
Considerem la funció $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. Calculeu el domini, les asímptotes, els intervals de creixement i decreixement, els extrems relatius i els punts d'inflexió.
Castella i Lleó 2015.

Problema 24
Considerem la funció definida a trossos $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \le 2 \\ \ln(x - 1) & \text{si } x > 2 \end{cases}$.
Determineu els valors de a, b i c a fi que f(x) siga contínua en tota la recta real i tinga un extrem relatiu en el punt $(1, -1)$.
Castella i Lleó 2015.

Problema 25
a) Estudieu els extrems relatius i els punts d'inflexió de la funció $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$.
b) Estudieu si la recta d'equació $y=-x-1+\ln 2$ és tangent a la gràfica de $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$ en algun punt d'inflexió de f(x).
Extremadura 2015.

Problema 26
a) Enuncieu el teorema de Bolzano.
b) Utilitzant el teorema de Bolzano, determineu un interval de la recta reals en què la funció polinòmica $p(x)=3x^3-x+1$ tinga alguna arrel.
c) Utilitzant el teorema de Bolzano, demostreu que les gràfiques de les funcions $f(x)=e^x+\ln\left(1+x^2\right)$ i $g(x)=e^x+1$ es tallen en algun punt.
Extremadura 2015.

Problema 27
Dibuixeu la gràfica de la funció $f(x)=\dfrac{2x^2}{x-1}$ estudiant: domini, simetries, punts de tall amb els eixos, asímptotes, intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius, punts d'inflexió i intervals de concavitat i convexitat.
Galícia 2015.

Problema 28
a) Definició i interpretació geomètrica de la derivada d'una funció en un punt.
b) Determineu els valors b i c perquè la funció $f(x)=\begin{cases}\ln\left(e+x^2\right) & \text{si}\, x<0\\ x^2+bx+c & \text{si}\, x\geq 0\end{cases}$ siga derivable en $x=0$.
Galícia 2015.

Problema 29
Siga $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$.
a) Determineu el somini de f.
b) Determineu les seues asímptotes.
c) Determineu els extrems relatius i estudieu la monotonia de f.
d) Dibuixeu la gràfica de f destacant els elements determinats anteriorment.
La Rioja 2015.

Problema 30
Siguen a i b dos nombres reals arbitraris. Considerem la funció

$$f(x)=\begin{cases}a\cdot\sin x+b\cdot\cos x & \text{si } x<\dfrac{\pi}{2}\\[2mm] \sin^2 x-a\cdot\cos x & \text{si } x\geq\dfrac{\pi}{2}\end{cases}.$$

a) Estudieu, segons els valors de a i b, la derivabilitat de la funció f.
b) Calculeu la funció derivada f'(x) en els casos en què f(x) siga derivable en tot el seu domini.
La Rioja 2015.

Problema 31
Calculeu els següents límits:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x^2+4x-1}-\sqrt{5x^2-6x}\right) \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2+3}\right)^{3x-1}.$$

Navarra 2015.

Problema 32
Demostreu que existiesen $\alpha\in\left]-1,1\right[$ i $\beta\in\left]-1,1\right[$, $\alpha\neq\beta$, tals que $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$,

essent $f(x)=\left(x^3+1\right)e^{\sqrt[3]{3x+2}}\cdot\sqrt[3]{(x-1)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$.

Navarra 2015.

Problema 33

Determineu les asímptotes de la funció $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x-2}$.

Navarra 2015.

Problema 34
Determineu a i b, nombres reals, de forma que la corba $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ passe pel punt $(-1,6)$ i la seua recta tangent en $x=1$ forme un angle de 45º amb l'eix OX.
Astúries 2015.

Problema 35
Es desitja construir un contenidor amb forma de paral·lelepípedee rectangular de

$100m^3$ de volum de forma que el llarg de la base siga $\dfrac{4}{3}$ de l'ample x de la base.

Sabem que els preus dels metre quadrat de la base del sostre i de la paret lateral són, respectivament, $225\ €/m^2$, $300\ €/m^2$ i $256\ €/m^2$. Determineu raonadament:
a) el valor x de l'ample de la base qe minimitza el cost.
b) El cost mínim.
Astúries 2015.

Problema 36

Calculeu el nombre real m a fi que $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+mx)}{\sin(2x)}=3$.

Astúries 2015.

Problema 37

a) Calculeu $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}}$.

b) Calculeu $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}}$.

c) És contínua la funció $f(x)=\dfrac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}}$ en $x=0$? Justifiqueu la resposta.

Múrcia 2015.

Problema 38

Considerem la funció $f(x)=\begin{cases} x^2+ax-3 & \text{si } x\le 1 \\ \ln\left(x^2\right)+b & \text{si } x>1 \end{cases}$.

Determineu els valors dels paràmetres a i b a fi que l funció f(x) és contínua i derivable en tot R.

Múrcia 2015.

Càlcul integral

Problema 1
Determineu e valor $a > 1$ sabent que l'àrea del recinte afitat entre la paràbola $y = -x^2 + ax$ i la recta $y = x$ és $\frac{4}{3}$.
Andalusia 2015 a1.

Problema 2
Siga f la funció definida per $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2(x-1)}$ per a $x \neq 0$ i $x \neq 1$ i siga F la primitiva de f la gràfica de la qual passa pel punt $P(2, \ln(2))$.
a) Determineu la recta tangent a la gràfica de F en el punt P.
b) Determineu la funció F.
Andalusia 2015 a1.

Problema 3
Calculeu $\int_0^{\pi} x^2 \cdot \sin x \, dx$.
Andalusia 2015 a3.

Problema 4
Siga $f : R \to R$ la funció definida per $f(x) = \left|x^2 - 4\right|$.
a) Dibuixeu la gràfica de la funció f.
b) Calculeu l'àrea del recinte afitat per la gràfica de la funció i la recta $y = 5$
Andalusia 2015 a3.

Problema 5
Calculeu $\int \frac{-x^2}{x^2 + x - 2} dx$.
Andalusia 2015 a4.

Problema 6
Determineu la funció $f :]0, +\infty[\to R$ sabent que $f''(x) = \ln(x)$ i que la seua gràfica té una tangent horitzontal en el punt $P(1, 2)$.
Andalusia 2015 a4.

Problema 7
Calculeu $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}$. Suggerència $\sqrt{x+2} = t$.
Andalusia 2015 a5.

Problema 8
Siga g la funció definida per $g(x) = \ln(x)$ per a $x > 0$.
Determineu el valor de $a > 1$ a fi que l'àrea del recinte afitat per la gràfica de la funció g, l'eix d'abscisses i la recta $x = a$ és 1.
Andalusia 2015 a5.

Problema 9
Siga f la funció definida per $f(x) = |\ln(x)|$ per a $x > 0$.
a) Feu un esbós del recinte limitat per la gràfica de f i la recta $y = 1$.
b) Calculeu els punts de tall de la gràfica de f i la recta $y = 1$.
c) Calculeu l'àrea del recinte.
Andalusia 2015 a6.

Problema 10
Calculeu $\int e^{2x} \sin(x)\, dx$.
Andalusia 2015 a6.

Problema 11
Siga f la funció definida per $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{2x}$ per a $x > 0$, i siga F la primitiva de f tal que $F(1) = 2$.
a) Calculeu $F'(e)$.
b) Determineu l'equació de la recta tangent a la gràfica F en el punt d'abscissa $x = e$.
Andalusia 2015 m6.

Problema 12
Calculeu la integral indefinida següent: $\int \dfrac{2x+5}{(x+3)^3}\, dx$.
Balears 2015.

Problema 13
Feu un dibuix aproximat de les corbes $y = 6x - x^2$ i $y = x^2 - 2x$, i indiqueu els punts on és tallen. Calculeu l'àrea del recinte limitat per les dues corbes anteriors.
Balears 2015.

Problema 14
Responeu a les qüestions següents:
a) Determineu l'equació de la recta tangent a la corba $y = x^3$ en el punt d'abscissa $x = 2$.
b) Calculeu l'àrea de la regió plana finita limitada per la corba $y = x^3$ i la recta $y = 3x - 2$.
Catalunya 2015 sèrie 2

Problema 15
Siga la funció $f(x) = x \cdot \sin(x)$.
Calculeu la primitiva de la funció f que passa pel punt $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ (unitats en radians).
Catalunya 2015 sèrie 4

Problema 16
Calculeu les integrals indefinides següents:
a) $\int \dfrac{dx}{(2x+1)^2 + 4}$ b) $\int x^2 \left(x^3 + 1\right)^{-7} dx$.
Canàries 2015.

Problema 17

Donada la funció $g(x)=\begin{cases}2x+4 & \text{si } -2\le x<0\\ (2x-2)^2 & \text{si } 0\le x\le 1\end{cases}$.

a) Feu un dibuix aproximat de l'àrea limitada per la gràfica de g(x) i l'eix d'abscisses.
b) Calculeu l'àrea de la regió anterior.
Castella la Manxa 2015

Problema 18

Donada la funció $f(x)=(x+1)e^{2x}$, es demana:
a) Calculeu els intervals de concavitat i convexitat i els punt d'inflexió de f(x).
b) Determineu la primitive de la funció f(x) que passe per l'origen de coordenades.
Castella la Manxa 2015

Problema 19

a) Enuncieu i interpreteu geomètricament el Teorema de Rolle.
b) Determineu la primitiva de la funció $f(x)=x^2\cdot\ln(x)$ la gràfica de la qual passa pel punt $(1,0)$.
Castella i Lleó 2015.

Problema 20

a) Calculeu $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.
b) Calculeu l'àrea de la regió afitada entre les gràfiques de les funcions $y=\cos x$, $y=\sin x$ i les rectes $x=0$ i $x=\frac{\pi}{2}$.
Castella i Lleó 2015.

Problema 21

Donada la funció $f(x)=\frac{x}{x^2-4}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}$, es demana:
a) Determineu el domini de f i les seues asímptotes.
b) Calculeu la reca tangent a la corba $y=f(x)$ en $x=0$.
c) Calculeu $\int f(x)\,dx$.
Madrid 2015

Problema 22

Donada la funció $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & \text{si } x<0\\ xe^x+1 & \text{si } x\ge 0\end{cases}$, es demana:
a) Estudieu la continuïtat de f.
b) Estudieu la derivabilitat de f i calculeu f' on siga possible.
c) Calculeu $\int_1^3 f(x)\,dx$.
Madrid 2015.

Problema 23
Calculeu la següent suma d'integrals definides:
$$\int_0^{e-1} \frac{1}{x+1}\,dx + \int_0^{\pi} \cos x \cdot e^{\sin x}\,dx.$$
Extremadura 2015.

Problema 24
a) Representeu, aproximadament, la gràfica de la funció $g(x)=\sin(2x)$ definida en l'interval $[0,\pi]$.
b) Calculeu l'àrea de la regió plana limitada per la gràfica de la funció $g(x)=\sin(2x)$, l'eix OX i les rectes $x=0$, $x=\pi$.
Extremadura 2015.

Problema 25
a) Definiu primitiva d'una funció i enuncieu la regla de Barrow.
b) Donada la funció $f(x)=ax^3+bx+c$, determineu a, b i c sabent que $y=2x+1$ és la recta tangent a la gràfica de f(x) en el punt corresponent a l'abscissa $x=0$ i que $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$.
Galícia 2015.

Problema 26
La gràfica d'un funció f(x) passa per l'origen de coordenades i la seua derivada és $f'(x)=(2-x)e^{3x}$.
Determineu la funció f(x) i calculeu els intervals de concavitat i convexitat de f(x).
Galícia 2015.

Problema 27
Siga g la funció tal que $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ i la seua derivada és igual a $g'(x)=\frac{\sin x}{x}$, $x>0$.

a) Determineu l'equació de la recta tangent a la gràfica de g en el punt $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

b) Siga $h(x)=\frac{g(x)}{x}$. Calculeu $h'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

c) Calculeu $\int x^2 \cdot g'(x)\,dx$.
La Rioja 2015.

Problema 28
Donades les funcions $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ i $g(x)=4-4x^2$, determineu els dos punts en què es tallen.
Calculeu l'àrea de la regió del plànol afitada per les dues corbes.
Navarra 2015.

Problema 29
Calculeu una primitiva de la funció $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Astúries 2015.

Problema 30

a) Calculeu la integral indefinida $\int 2x \cdot \text{arctg}x \, dx$.

b) De totes les primitives de la funció $f(x) = 2x \cdot \text{arctg}x$, determineu la que passa pel punt de coordenades $(0, -2)$.

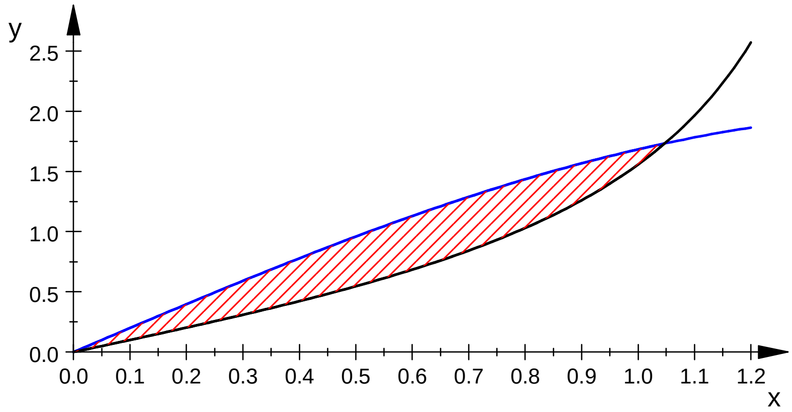
Múrcia 2015.

Problema 31

Considerem el recinte limitat per la gràfica de les funcions $f(x) = 2\sin x$ i $g(x) = \text{tg}x$ en el primer quadrant del plànol XY, que està representat en la figura adjunta.

a) Determineu els punts de tall de les dues gràfiques.

b) Calculeu l'àrea d'aquest recinte.



Múrcia 2015.