

Problemes de Geometria

Problema 1

Considerem els punts $B(1, 2, -3)$, $C(9, -1, 2)$, $D(5, 0, -1)$ i la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$.

- Calculeu l'àrea del triangle els vèrtexs del qual són B, C, D.
- Determineu un punt A en la recta r tal que el triangle $\triangle ABC$ siga rectangle en A.
Andalusia 2015 a1.

Problema 2

Considerem el punt $P(1, 0, -1)$ i la recta r donada per $r \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$.

- Calculeu la distància de P a r.
- Determineu l'equació general del plànel que passa per P i conté la recta r.
Andalusia 2015 a1.

Problema 3

Siga r la recta definida per $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \lambda - 2 \end{cases}$ i la recta s donada per $s \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$.

- Determineu l'equació de la recta que talla perpendicularment ambdues rectes.
- Calculeu la distància entre r i s.
Andalusia 2015 a3.

Problema 4

Considerem el plànel Π d'equació $\Pi \equiv mx + 5y + 2z = 0$ i la recta r donada per $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{n} = \frac{z-1}{2}$.

- Determineu m i n a fi que a recta r siga perpendicular al plànel Π .
- Determineu m i n a fi que a recta r estiga continguda en el plànel Π .
Andalusia 2015 a3.

Problema 5

Siguen els punts $A(0, 1, 1)$, $B(2, 1, 3)$, $C(-1, 2, 0)$, $D(2, 1, m)$.

- Determineu m a fi que A, B, C i D estiguen en un plànel
- Determineu l'equació del plànel respecte del qual A i B siguen simètrics.
- Calculeu l'àrea del triangle de vèrtexs A, B i C.
Andalusia 2015 a4.

Problema 6

Considerem el plànel $\Pi \equiv 2x + y - z + 8 = 0$.

- Determineu el punt P' simètric del punt $P(2, -1, 5)$ respecte del plànel Π .
- Determineu la recta r' simètrica de la recta $r \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{1}$ respecte del plànel Π .
Andalusia 2015 a4.

Problema 7

Considerem el punt $P(-3, 1, 6)$ i la recta r donada per $r \equiv \begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$.

- Determineu l'equació del plànel que passa per P i és perpendicular a r .
 - Determineu les coordenades del punt simètric de P respecte de la recta r .
- Andalusia 2015 a5.*

Problema 8

Els punts $A(0, 1, 1)$, $B(2, 1, 3)$ són dos vèrtexs d'un triangle. El tercer vèrtex pertany a la

recta r donada per $r \equiv \begin{cases} 2x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

a) Determineu les coordenades dels possibles punts C de r a fi que el triangle $\triangle ABC$ tinga un angle recte en el vèrtex A .

b) Determineu les coordenades dels possibles punts D de r a fi que el triangle $\triangle ABD$ tinga àrea igual a $\sqrt{2}$.

Andalusia 2015 a5.

Problema 9

Siguen els plànols $\Pi \equiv x + 3y + 2z - 5 = 0$ i $\Pi' \equiv -2x + y + 3z + 3 = 0$.

- Determineu l'angle que formen els plànols Π , Π' .
- Calculeu el volum del tetraedre limitat per Π i els plànols coordenats.

Andalusia 2015 a6.

Problema 10

Siguen el punt $P(1, 6, -2)$ i la recta $r \equiv \frac{x-5}{6} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{2}$.

- Determineu l'equació general del plànel Π que conté el punt P i la recta r .
- Calculeu la distància entre el punt P i la recta r .

Andalusia 2015 a6.

Problema 11

Determineu unes equacions paramètriques per a la recta r , que conté el punt

$P(3, -5, 4)$ i talla perpendicularment a la recta $s \equiv \frac{x-4}{5} = \frac{y-8}{-3} = \frac{z}{4}$.

Andalusia 2015 m6.

Problema 12

Siga la recta d'equació $r \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{4} = z$.

a) Determineu el punt de la recta r que equidista de l'origen de coordenades del punt $P(4, -2, 2)$.

b) Determineu el punt de la recta r més proper a l'origen de coordenades.

Andalusia 2015 m6.

Problema 13

Estudieu la posició relativa de les rectes

$$r \equiv \frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{5} = z, \quad s \equiv \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2t \\ z = 5 \end{cases}.$$

En cas que es tallen, determineu el punt d'intersecció.

Balears 2015.

Problema 14

Determineu la recta que passa pel punt $A(1, 0, 2)$ i és paral·lela als plànols

$$x - 2y + 3z + 1 = 0 \quad \text{i} \quad 2x - 3y + z + 6 = 0.$$

Balears 2015.

Problema 15

Siga r la recta de l'espai que té per equació $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = z$ i siga P el punt de

coordenades $P(6, 0, -1)$.

a) Determineu l'equació general del plànel que passa pel punt P i talla perpendicularment la recta r .

b) Determineu l'equació paramètrica del plànel que passa pel punt P i conte la recta r .

Catalunya 2015 sèrie 2

Problema 16

Considereu la recta de l'espai que té per equació $r \equiv (x, y, z) = (-4 + 2\lambda, -2, 1 - \lambda)$ i els plànols Π_1, Π_2 d'equacions $\Pi_1 \equiv x + 2y + 2z = -1$ i $\Pi_2 \equiv x - 2y + 2z = -3$, respectivament.

a) Determineu la posició relativa de Π_1, Π_2 .

b) Comproveu que tots els punts de la recta r estan situats a la mateixa distància dels plànols Π_1, Π_2 .

Catalunya 2015 sèrie 2

Problema 17

Siga el punt $P(2, 0, 2)$ i el plànel Π d'equació $\Pi \equiv x - y + z = 1$.

a) Determineu l'equació paramètrica de la recta que passa per P i és perpendicular al plànel Π .

b) Calculeu la distància del punt P al plànel Π .

Catalunya 2015 sèrie 4

Problema 18

Siga el punt $P(2, 0, 2)$ i la recta $r \equiv (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, 1, 1)$.

a) Determineu l'equació paramètrica del plànel que passa pel punt P i conte la recta r .

b) Determineu l'equació general del plànel que passa pel punt P i és perpendicular a la recta r .

Catalunya 2015 sèrie 4

Problema 19

a) Determineu l'equació del plànel que passa pel punt $P(-1, 2, 3)$ i és paral·lel als vectors $a = (-1, -2, -3)$, $b(1, 3, 5)$.

b) Determineu el valor de m a fi que el plànel de l'apartat anterior i el plànel $mx - y + 5z = 8$ siguin perpendiculars.

Euskadi 2015.

Problema 20

Determineu la recta de vector director $v = (1, 2, 3)$ i que passa pel punt P' simètric del punt $P(0, -2, 0)$ respecte del plànel $\Pi \equiv x + 3y + z = 5$

Euskadi 2015.

Problema 21

Considerem els plànols Π_1, Π_2, Π_3 d'equacions $\Pi_1 \equiv 2x + 2y + az = 1$ i

$\Pi_2 \equiv 2x + ay + 2z = -2$, $\Pi_3 \equiv ax + 2y + 2z = 1$.

a) Determineu el valor a a fi que els plànols continguin una recta comuna.

b) Determineu un vector director d'aquesta recta.

c) Determineu l'equació paramètrica de la recta comuna als tres plànols donats.

Astúries 2015.

Problema 22

Considerem les rectes $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - 2y + z = 2 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$.

a) Determineu la posició relativa de les rectes r i s .

b) Determineu, si és possible, l'equació implícita d'un plànel paral·lel a r que conté s .

c) Calculeu la distància mínima entre r i s .

Astúries 2015.

Problema 23

Donades les rectes $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$ i $s \equiv \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 3y - z + (2 + m) = 0 \end{cases}$, es demana:

a) Determinar si r i s són paral·leles.

b) Determinar el valor del paràmetre m a fi que les rectes r i s estiguen contingudes en un mateix plànel.

Canàries 2015.

Problema 24

Siguin les rectes r i s $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 \end{cases}$ i $s \equiv x - 1 = y = z - 3$. Calculeu:

a) L'equació del plànel perpendicular a la recta r que passa pel punt $(0, 1, 3)$.

b) Les coordenades del punt intersecció d'ambdues rectes.

c) L'equació del plànel Π que conté les rectes r i s .

Canàries 2015.

Problema 25

Considerem el punt $P(1, 1, 1)$ i el plànel $\Pi \equiv (x, y, z) = (2, 1, 0) + t(-1, 1, 1) + s(1, -1, 1)$.

- Determineu l'equació de la recta r que passa pel punt P i és ortogonal al plànel Π .
- Calculeu la distància entre P i Π .
- Calculeu l'equació implícita del plànel Π .

Cantàbria 2015.

Problema 26

Siguen els punts $A(2, -1, 2)$, $B(1, 0, 0)$, $C(2, 4, -3)$, i la recta $r \equiv \begin{cases} 2y - z = 0 \\ x + z = 2 \end{cases}$.

- Determineu l'equació de la recta que passa pel punt A i pel punt mig del segment \overline{BC} .

b) Calculeu l'àrea del triangle $\triangle ABC$.

- Calculeu la distància del punt C a la recta r .

Cantàbria 2015.

Problema 27

a) Calculeu la distància del punt $P(-1, 2, 0)$ a la recta $r \equiv \begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$.

- Calculeu el punt simètric de P respecte de r .

Castella la Manxa 2015.

Problema 28

Donats els punts $A(1, \lambda + 1, 0)$, $B(2, \lambda, 0)$, $C(\lambda + 2, 0, 1)$, es demana:

- Estudieu si existeix algun valor del paràmetre $\lambda \in \mathbb{R}$ a fi que A , B , i C estiguen alineats.

- Per a $\lambda = -1$, determineu l'equació implícita del plànel Π que conté els punts A , B i C .

Castella la Manxa 2015.

Problema 29

Siguen les rectes $r \equiv x = y = z$ i $s \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 3z = 1 \end{cases}$.

- Comproveu que les rectes r i s es creuen.

- Determineu la recta que talla perpendicularment a les rectes r i s .

Castella i Lleó 2015.

Problema 30

- Determineu l'equació del plànel que és perpendicular al segment d'extremes $A(0, -1, 3)$, $B(2, -1, 1)$ i passa pel punt mig d'aquest segment.

- Determineu l'àrea de triangle els vèrtexs del qual són els punts de tall del plànel $2x + y + 2z - 2 = 0$ amb els eixos de coordenades.

Castella i Lleó 2015.

Problema 31

- Donats els vectors $u = (2, 3, 4)$, $v = (-1, -1, -1)$ i $w = (-1, \lambda, -5)$, determineu els valors de λ que fan que el paral·lelepípede P generat pels tres vectors tinga volum 6.

- Obteniu l'equació de la recta inclosa en el plànel $z = 0$, amb direcció perpendicular a $a = (2, -1, 4)$ i que passa pel punt $(1, 1, 0)$.

Madrid 2015.

Problema 32

Donats el punt $P(-4, 6, 6)$, l'origen de coordenades $O(0, 0, 0)$ i la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = -4 + 4\lambda \\ y = 8 + 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \text{ es demana:}$$

- Determineu un punt Q de la recta r , a fi que la seua projecció Q' sobre \overline{OP} siga el punt mig d'aquest segment.
- Determineu la distància de P a r .
- Existeix algun punt R de la recta r , a fi que els punts O, P, R estiguen alineats? En cas afirmatiu, determineu el punt (o els punts) amb aquesta propietat o en cas negatiu, justifiqueu la no existència.

Madrid 2015.

Problema 33

En l'espai tridimensional considerem el plànel $\Pi \equiv ax + by + cz = d$, la recta $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

i el punt $P(1, 0, 1)$.

- Obteniu com han de ser els nombres reals a, b, c, d a fi que el plànel Π continga la recta r .
- Suposant que Π conté a r , proveu que la distància del punt P a Π és menor o igual que 1. $d(P, \Pi) \leq 1$.

Extremadura 2015.

Problema 34

En l'espai tridimensional considerem els plànols $\Pi_1 \equiv x + y - z = 1$, $\Pi_2 \equiv x - y + z = 1$.

Obteniu el conjunt H dels punts que disten igual d'aquests dos plànols.

Extremadura 2015.

Problema 35

Donada la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$

- Determineu l'equació implícita del plànel Π que passa pel punt $P(2, 1, 2)$ i és perpendicular a r . Calculeu el punt intersecció de r i Π .
- Calculeu la distància de $P(2, 1, 2)$ a la recta r .
- Determineu el punt simètric de $P(2, 1, 2)$ respecte de la recta r .

Galícia 2015.

Problema 36

Donades les rectes $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$, $s \equiv \frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{4}$.

- Estudieu la seua posició relativa. Calculeu l'equació general del plànel que passa per l'origen de coordenades i és paral·lel a r i s .
- Calculeu l'equació paramètrica de la recta que talla perpendicularment r i s .

Galícia 2015.

Problema 37

Determineu l'equació contínua de la recta que passa pel punt $P(1, -2, 3)$ i talla

perpendicularment a la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ 3x + y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$.

Navarra 2015

Problema 38

Donats els punts $P(1, 2, -1)$, $Q(2, -1, 1)$ i $R(3, 1, 2)$, determineu tots els possibles punts S tal que P , Q , R i S són els vèrtexs d'un paral·lelogram.

Navarra 2015

Problema 39

Tres dels quatre vèrtexs d'un tetraedre són els punts $A(2, 1, 0)$, $B(3, 4, 0)$, $C(5, 1, 0)$. El quart vèrtex D pertany a la recta r que passa pel punt $(1, 2, 3)$ i té com vector director el vector $(-1, 1, 1)$.

a) Determineu l'equació paramètrica de la recta r .

b) Calculeu les coordenades del vèrtex D a fi que el volum del tetraedre siga 9.

Múrcia 2015.

Problema 40

Considerem la recta r i el plànel Π donades per les equacions següents:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2} \text{ i } \Pi \equiv 2x + y + z = -7.$$

a) Comproveu que la recta r talla el plànel Π i calculeu l'angle que formen.

b) Determineu el plànel que passa pel punt $P(2, -3, 3)$, és paral·lel a la recta r i és perpendicular al plànel Π .

Múrcia 2015.