Donat el sistema d'equacions $\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ 2x+4y+5z=k-2 \\ x+k^2y+3z=2k \end{cases}$ on k és un paràmetre real es demana:

a) Discutir, d'una manera raonada, els sistema segons els valors de k.
b) Obtenir, d'una manera raonada, escrivint tots els passos del raonament utilitzat, totes les solucions del sistema quan $k=-1$.
c) Resoldre d'una manera raonada el sistema quan $k=0$.
*Selectivitat juny 2014. Problema A1.*

Solució:
a)
Calculem el determinant de la matriu A de coeficients:

$$|A| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & k^2 & 3 \end{pmatrix}\right| = -k^2+1$$

$|A|=0$, $-k^2+1=0$, $k=1,-1$.

Si $|A|\neq 0$, $\text{rang}A=3$.

Aleshores, si $k\neq 1,-1$ $\text{rang}A=3$.
$\text{rang}A'=3$
$\text{rang}A=\text{rang}A'=\text{núm.incognites}=3$. El sistema és compatible determinat.

Siga $k=1$ $|A|=0$, aleshores, $\text{rang}A<3$.

El menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\neq 0$, aleshores, $\text{rang}A\geq 2$. Aleshores:

Si $k=1$ $\text{rang}A=2$.
Per calcular el rang de la matriu ampliada calcularem el determinat de la 1ª, 2ª i 4ª columna de la matriu ampliada:

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right| = -4\neq 0$$. Aleshores, $\text{rang}A'=3$.

$\text{rang}A\neq\text{rang}A'$, aleshores, el sistema és incompatible.

Siga $k=-1$ $|A|=0$, aleshores, $\text{rang}A<3$.

El menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\neq 0$, aleshores, $\text{rang}A\geq 2$. Aleshores:

Si $k=-1$ $\text{rang}A=2$.
Per calcular el rang de la matriu ampliada calcularem el determinat de la 1ª, 2ª i 4ª columna de la matriu ampliada:

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right| = 0$$. Aleshores, $\text{rang}A'=2$.

$\text{rang}A=\text{rang}A'=2<\text{núm.incognites}=3$. El sistema és compatible indeterminat.

b)
$k=-1,\ \text{rang}A=\text{rang}A'=2<\text{núm.incognites}=3$. El sistema és compatible indeterminat. La tercera equació és dependent de les dues primeres.

$$\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ 2x+4y+5z=-3 \end{cases}.$$

El resoldrem pel mètode de Gauss:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right) \underset{E_2\equiv 2E_1-E_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$. El sistema és equivalent:

$\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ 2y+z=1 \end{cases}$, la solució és: $\begin{cases} x=-\dfrac{5}{2}-\dfrac{7}{2}\mu \\ y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mu \\ z=\mu \end{cases}$ , $\mu\in R$.

c)
Si $k=0$ per l'apartat a) el sistema és compatible determinat. Resoldrem el sistema aplicant la regla de Cramer.

$$|A|=\left|\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right|=1.$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{|A|}=6 \\[2ex] y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{|A|}=-1 \\[2ex] z=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}=-2 \end{cases}$$

Es donen el punt $A(-1,0,2)$ i les rectes $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z-2$ i $s \equiv \begin{cases} x = -1-2\lambda \\ y = 1+3\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:
a) L'equació del pla $\pi$ que passa pel punt A i conté la recta r.
b) L'equació del pla $\sigma$ que passa pel punt A i és perpendicular a la recta s.
c) Un vector direcció de la recta l intersecció dels plans $\pi$, $\sigma$ i la distància entre les rectes s i l.
*Selectivitat juny 2014. Problema A2.*

Solució:
a)
Siga $P(1,0,2)$ un punt de la recta r i $v = (2,3,1)$ el vector director.
$\overrightarrow{PA} = (-2,0,0)$.
El plànol $\pi$ que passa pel punt A i té per vectors directors $\overrightarrow{PA} = (-2,0,0)$ i $v = (2,3,1)$.
La seua equació implícita és:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad \pi \equiv y - 3z + 6 = 0.$$

b)
Siga $z = 0, y = -6, x = -11$ un punt de la recta s i $w = (-2,3,1)$ el vector director.
El vector característic del plànol $\sigma$ és $w = (-2,3,1)$.
La seua equació general és:
$\sigma \equiv -2x + 3y + z + D = 0$.
El punt A pertany al plànol.
$-2(-1) + 3 \cdot 0 + 2 + D = 0$. Resolent l'equació:
$D = -4$.
$\sigma \equiv -2x + 3y + z - 4 = 0$.
c)

$$l \equiv \begin{cases} y - 3z + 6 = 0 \\ -2x + 3y + z - 4 \end{cases}.$$

Determinem un punt de la recta l:
Si $z = 0$ aleshores $y = -6, x = -11$. Aleshores les coordenades del punt són:
$R(-11,-6,0)$.
Siga $u = (0,1,-3)$ vector característic del plànol $\pi \equiv y - 3z + 6 = 0$
El vector director de la recta l és igual a producte vectorial dels característics dels dos plànols.

$$p = w \times u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = .10i - 6j - 2k = (-10,-6,-2).$$

Els vectors directors de les rectes s, l $w = (-2,3,1)$, $q = (5,3,1)$ són linealment independents ja que les components del vectors no són proporcionals.
Aleshores les rectes s, l es creuen o són secants.
$\overrightarrow{QR} = (-10,-7,-1)$.

$$d(s,l) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{QR}, w, q\right]\right|}{\|w \times q\|}.$$

$$[\overrightarrow{QR}, w, q] = \begin{vmatrix} -10 & -7 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -28 .$$

$$w \times q = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 7j - 21k = (0, 7, -21) . \quad \|w \times q\| = \sqrt{490} .$$

$$d(s, l) = \frac{\left|[\overrightarrow{QR}, w, q]\right|}{\|w \times q\|} = \frac{28}{\sqrt{490}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) El valor de m per al qual la funció $f(x)=\begin{cases} m(x+1)e^{2x} & x\le 0 \\ \dfrac{(x+1)\sin x}{x} & x>0 \end{cases}$ és contínua en $x=0$.

b) Els intervals de creixement o decreixement de la funció $y=(x+1)e^{2x}$.

c) La integral $\int (x+1)e^{2x}dx$ i l'àrea limitada per la corba $y=(x+1)e^{2x}$, i les rectes $x=0$, $x=1$, $y=0$.

*Selectivitat juny 2014. Problema A3.*

Solució:

a)

$y=m(x+1)e^{2x}$ és contínua $y=\dfrac{(x+1)\sin x}{x}$ és contínua en $R\sim\{0\}$.

$f(0)=m(0+1)e^{0}=m$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} m(x+1)e^{2x}=m$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x+1)\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1\cdot 1=1.$

Per què la funció f(x) siga contínua en $x=0$ els dos límits han de coincidir en f(0).
Per tant, si $m=1$ la funció és contínua.

b)

Siga $g(x)=(x+1)e^{2x}$.

$g'(x)=(2x+3)e^{2x}$.

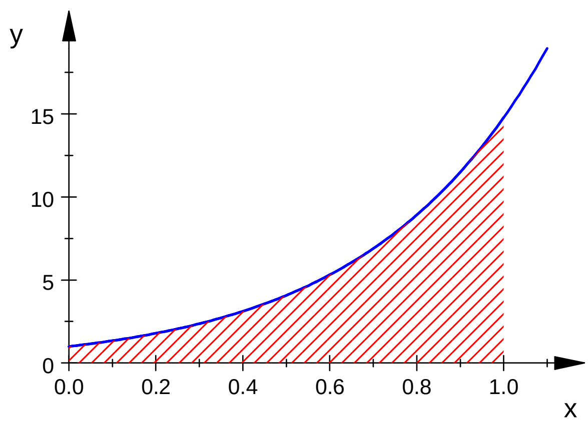
La funció és estrictament creixent si $g'(x)>0$.

$(2x+3)e^{2x}>0$,

Com que $e^{2x}>0$, $2x+3>0$.

Aleshores la funció és estrictament creixent quan $x>-\dfrac{3}{2}$, és a dir, quan $x\in\left]-\dfrac{3}{2},+\infty\right[$.

La funció és estrictament decreixent si $g'(x)<0$. És a dir, $x\in\left]-\infty,-\dfrac{3}{2}\right[$.




c)

$\int (x+1)e^{2x}dx$. Utilitzarem la integració per parts.

$u=x+1,\quad du=dx$

$dv=e^{2x}dx \quad v=\int e^{2x}dx=\dfrac{1}{2}\int 2e^{2x}dx=\dfrac{1}{2}e^{2x}$

$$\int (x+1)e^{2x}dx=(x+1)\frac{1}{2}e^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}dx=\left(\frac{2x+1}{4}\right)e^{2x}+C.$$

g(x) és estrictament creixent en $[0,1]$, aleshores, $g(x)>0$ quan $x\in[0,1]$.

L'àrea limitada per la corba $g(x)=(x+1)e^{2x}$ i les rectes $x=0$, $x=1$, $y=0$ és:

$$\int_0^1 (x+1)e^{2x}dx=\left[\left(\frac{2x+1}{4}\right)e^{2x}\right]_0^1=\frac{3}{4}e^{2}-\frac{1}{4}.$$

Es donen les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$, i $C=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) la matriu inversa $A^{-1}$ de la matriu A.

b) La matriu X que és solució de l'equació $AX=BC$.

c) El determinant de la matriu $2M^3$, sent M una matriu quadrada d'ordre 2 el determinant de la qual val $\frac{1}{2}$.

*Selectivitat juny 2014. Problema B1.*

Solució:

a)

$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$, la matriu A té inversa.

$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1 \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0 \qquad A_{13}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$

$A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1 \qquad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1 \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$

$A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2 \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1 \qquad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}A)^t=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

b)

$AX=BC$.

$A^{-1}AX=A^{-1}BC$.

$X=A^{-1}BC$.

$$X=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ -2 & 2 & 6\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

c)

Si tots els elements d'una matriu $2\times 2$ estan multiplicats per 2, del determinant de la matriu podem treure 4 com factor.

$|AB|=|A|\cdot|B|$.

$$\det(2M^3)=\det(2M)\cdot\det(M)\cdot\det(M)=4\cdot(\det(M))^3=4\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}.$$

Tenim el triangle T, els vèrtexs del qual són $A(1, 2, -2)$, $B(0, -3, 1)$ I $C(-1, 0, 0)$ I els plans $\pi_1 \equiv x + y + z + 1 = 0$ I $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = -\alpha + \beta + 1 \\ y = \alpha - 2\beta \\ z = \alpha + \beta \end{cases}$.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) La posició relativa del pla $\pi_1$ i del pla que conté el triangle T.

b) Un vector $\overrightarrow{n_1}$ perpendicular al pla $\pi_1$ i un vector $\overrightarrow{n_2}$ perpendicular al pla $\pi_2$ i el cosinus del l'angle format pels vectors $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$.

c) Les equacions paramètriques de la recta intersecció dels plans $\pi_1$, $\pi_2$.

*Selectivitat juny 2014. Problema B2.*

Solució:

a)

$\overrightarrow{AB} = (-1, -5, 3)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, -2, 2)$.

L'equació del plànol que conté el triangle T és:

$\pi_T \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ -1 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Simplificant:

$\pi_T \equiv x + y + 2z + 1 = 0$.

b)

L'equació implícita del plànol $\pi_2$ és:

$\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Simplificant:

$\pi_2 \equiv 3x + 2y + z - 3 = 0$

El vector normal o característic del plànol $\pi_1$ és $\overrightarrow{n_1} = (1, 1, 1)$.

El vector normal o característic del plànol $\pi_2$ és $\overrightarrow{n_2} = (3, 2, 1)$.

Utilitzant el producte escalar el cosinus de l'angle que formen els dos vectors és:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left\|\overrightarrow{n_1}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{n_2}\right\|} = \frac{6}{\sqrt{3}\sqrt{14}} = \frac{6}{\sqrt{42}} = \frac{\sqrt{42}}{7}.$$

c)

La recta r que formen els dos plànols $\pi_1$, $\pi_2$, té equació implícita:

$r \equiv \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 3x + 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$. Resolent el sistema, l'equació paramètrica és:

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 + \alpha \\ y = -6 - 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}.$$

Tenim un quadrat de marbre de costat 80cm. Es produeix el trencament d'un cantó i queda un pentàgon de vèrtexs $A(0,20)$, $B(20,0)$, $C(80,0)$, $D(80,80)$ i $E(80,80)$. Per a obtenir una peça rectangular, triem un punt $P(x,y)$ del segment $\overline{AB}$ i fem dos talls paral·lels al eixos OX i OY. Així obtenim un rectangle R els vèrtexs del qual són $P(x,y)$, $F(80,y)$, $D(80,80)$, $G(x,80)$.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

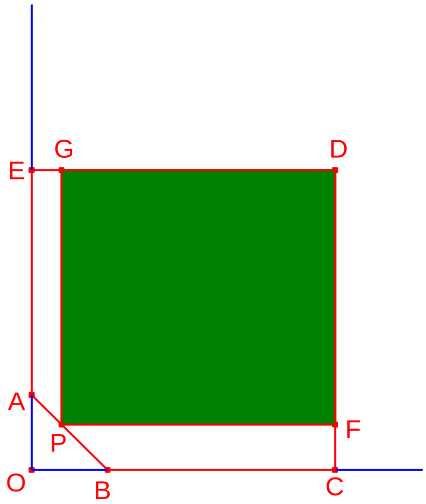
a) L'àrea del rectangle R en funció de x, quan $0 \le x \le 20$.

b) El valor de x per al qual l'àrea del rectangle R és màxima.

c) El valor de l'àrea màxima del rectangle R.

*Selectivitat juny 2014. Problema B3.*

Solució:




La recta que passa pels punts A, B té equació:

$r_{AB} \equiv y = -x + 20$.

Les coordenades del punt P són $P(x, -x+20)$.

$\overline{PF} = 80 - x$, $\overline{PG} = 80 - (-x+20) = x + 60$.

L'àrea del rectangle PFDG és:

$S(x) = (80-x)(x+60)$, $0 \le x \le 20$.

$S(x) = -x^2 + 20x + 480$.

La funció és una paràbola convexa.

El màxim s'assoleix en el vèrtex:

$x = \dfrac{20}{2(-1)} = 10u$.

L'àrea màxima és:

$S(10) = 4900u^2$.

Notem que PFGG màxim és un quadrat.