Problemes selectivitat Juliol 2019

Problema A.1.

Es dóna el sistema d'equacions $\begin{cases} 2x+3z=a \\ x-2y+2z=5 \\ 3x-y+5z=a+1 \end{cases}$, en què a és un paràmetre real.

Obtingueu raonadament, escrivint tots el passos del raonament utilitzat:

a) Els valors de a per als quals el sistema és compatible determinat.
b) La solució del sistema quan $a=-1$
c) El valor de a per tal que el sistema tinga una solució (x,y,z) que verifique $x+y+z=0$

Problema A.2.

Es dóna el pla $\pi \equiv 2x+y+2z=8$ i el punt $P(10,0,10)$

Obtingueu raonadament, escrivint tots el passos del raonament utilitzat:

a) La distància del punt P al pla π
b) L'àrea del triangle els vèrtexs del qual són els punts A, B, i C, obtinguts en trobar la intersecció del pla π amb els eixos coordenats.
c) El volum del tetraedre els vèrtexs del qual són P, A, B i C.

Problema A.3.

Es dóna la funció real h definida per $h(x)=\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$

Obtingueu raonadament, escrivint tots el passos del raonament utilitzat:

a) El domini de la funció h. Els límits $\lim_{x\to+\infty} h(x)$, $\lim_{x\to 0} h(x)$
b) L'asímptota de la corba $y=h(x)$
c) La primitiva de la funció h (és a dir $\int h(x)dx$) i l'àrea de la superfície tancada entre les rectes $y=0, x=1, x=5$ i la corba $y=h(x)$

Problema B.1.

Es donen les matrius $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ i $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Obtingueu raonadament, escrivint tots el passos del raonament utilitzat:

a) Els valors de a per als quals l'equació matricial $AX=aX$ sols admet una solució
b) Totes les solucions de l'equació matricial $AX=5X$
c) La comprovació que $X=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ és una solució de l'equació matricial $AX=2X$ i, sense calcular la matriu A^{100}, el valor de β tal que $A^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Problema B.2.

Es donen en l'espai la recta $r \equiv \frac{x-a}{-1}=\frac{y}{-4}=\frac{z}{\beta}$ i el pla $\pi \equiv x+2y+3z=6$

Obtingueu raonadament, escrivint tots el passos del raonament utilitzat:

a) La posició relativa de la recta r i el pla π en funció dels paràmetres a i β
b) La distància entre la recta r i el pla π quan $a=6$ i $\beta=3$
c) L'equació del pla que passa per $(0,0,0)$ i que no talla el pla π

Problema B.3.

Un projectil està unit al punt $(0,2)$ per una corda elàstica i tensa. El projectil recorre la corba $y = 4 - x^2$ d'extrems $(-2,0)$ i $(2,0)$.

Obtingueu raonadament, escrivint tots el passos del raonament utilitzat:

a) La funció de la variable x que espressa la distància entre un punt qualsevol $(x, 4 - x^2)$ de la corba $y = 4 - x^2$ i el punt $(0,2)$

b) Els punts de la corba $y = 4 - x^2$ a major distància absoluta del punt $(0,2)$ per a $-2 \leq x \leq 2$

c) Els punts de la corba $y = 4 - x^2$ a menor distància absoluta del punt $(0,2)$ per a $-2 \leq x \leq 2$

d) L'àrea de la superfície per la que s'ha mogut la corda elàstica, és a dir, l'àrea compresa entre les corbes $y = 4 - x^2$ i $y = 2 - |x|$ quan $-2 \leq x \leq 2$

Problema A.1.

Es dóna el sistema d'equacions $\begin{cases} 2x + 3z = a \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = a + 1 \end{cases}$, en què a és un paràmetre real.

Obtingueu <u>raonadament, escrivint tots el passos del raonament utilitzat</u>:

a) Els valors de a per als quals el sistema és compatible determinat.

b) La solució del sistema quan $a = -1$

c) El valor de a per tal que el sistema tinga una solució (x, y, z) que verifique $x + y + z = 0$

Solució:

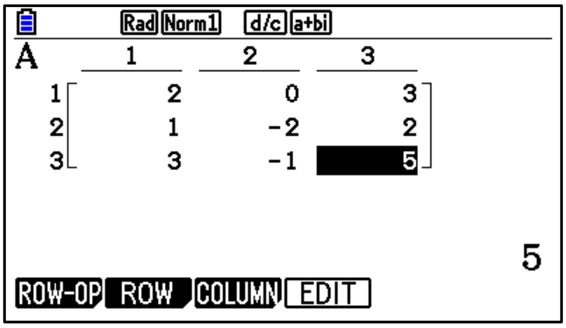
a)

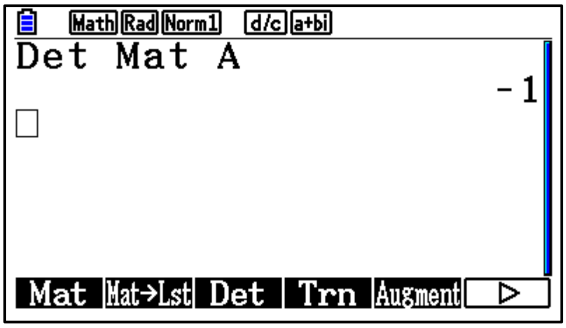
Siga la matriu de coeficients $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

$\det(A) = -1 \neq 0$

Aleshores, $rang\ A = 3, rang A' = 3,\ \forall\ a \in \mathbb{R}$

El sistema és compatible determinat $\forall\ a \in \mathbb{R}$

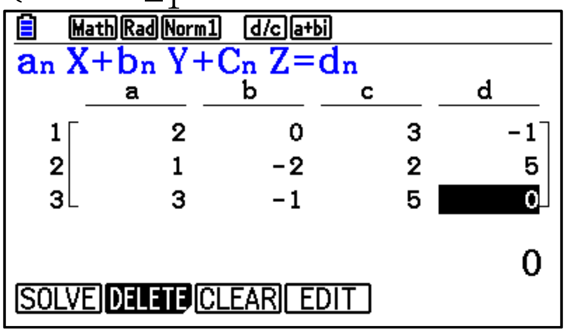


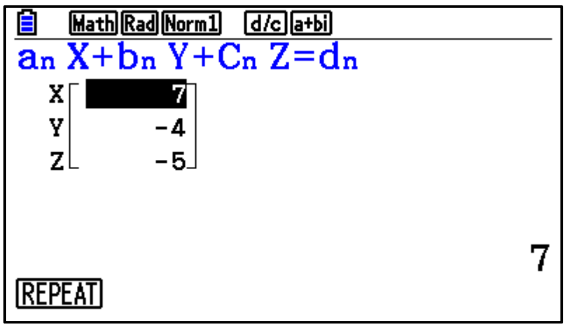


b)

$a = -1$ el sistema inicial és $\begin{cases} 2x + 3z = -1 \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = 7 \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = -4 \\ x = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = -5 \end{cases}$$





Resolem el sistema en el paràmetre a, $\begin{cases} 2x + 3z = a \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = a + 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ a+1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = 2a + 9 \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & a & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & a+1 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = -4 \\ x = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & a \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & a+1 \end{vmatrix}}{-1} = -a - 6 \end{cases}$$

A fi que la solució anterior siga solució de l'equació $x + y + z = 0$

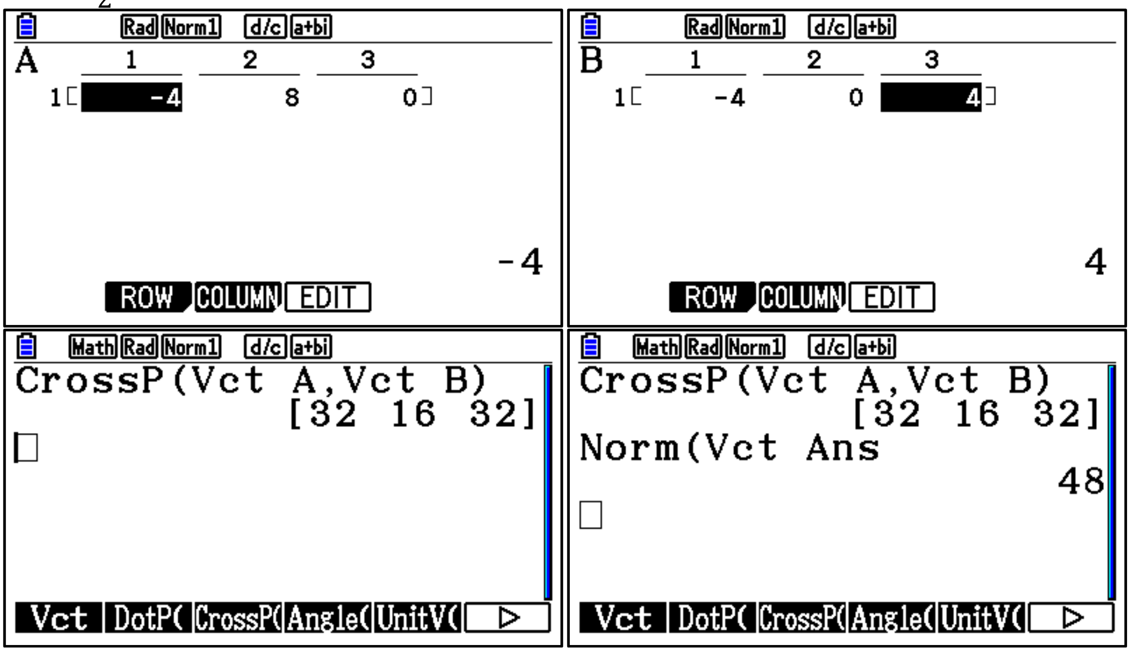
$2a + 9 - 4 - a - 6 = 0$

$a = 1$

Aleshores, $(x, y, z) = (11, -4, -7)$

Problema A.2.
Es dóna el pla $\pi \equiv 2x + y + 2z = 8$ i el punt $P(10, 0, 10)$
Obtingueu <u>raonadament, escrivint tots el passos del raonament utilitzat</u>:

a) La distància del punt P al pla π
b) L'àrea del triangle els vèrtexs del qual són els punts A, B, i C, obtinguts en trobar la intersecció del pla π amb els eixos coordenats.
c) El volum del tetraedre els vèrtexs del qual són P, A, B i C.

a)
$$d(P, \pi) = \left| \frac{2 \cdot 10 + 0 + 2 * 10 - 8}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} \right| = \frac{32}{3}$$
b)
Per calcular els vèrtexs A, B, C resolem tres sistemes formats pel plànols i els eixos coordenats:
$$\begin{cases} \pi \equiv 2x + y + 2z = 8 \\ \quad OX \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{cases}$$
La solució és $A(4, 0, 0)$
$$\begin{cases} \pi \equiv 2x + y + 2z = 8 \\ \quad OY \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{cases}$$
La solució és $B(0, 8, 0)$
$$\begin{cases} \pi \equiv 2x + y + 2z = 8 \\ \quad OZ \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{cases}$$
La solució és $C(0, 0, 4)$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és $S_{ABC} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|$
$\overrightarrow{AB} = (-4, 8, 0), \overrightarrow{AC} = (-4, 0, 4)$
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (32, 16, 32)$$
$$\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\| = \sqrt{32^2 + 16^2 + 32^2} = 48$$
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\| = 24$$


c)

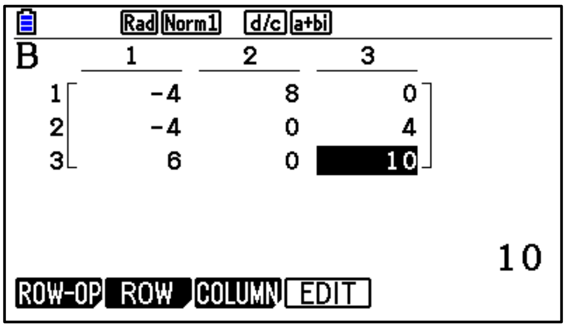
$\overrightarrow{AP} = (14, -8, 10)$

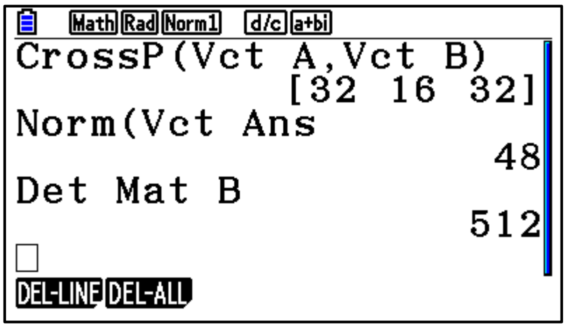
El volum del tetràedre és

$$V_{PABC} = \frac{1}{6}\left|det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}\right)\right|$$

$$det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}\right) = \begin{vmatrix} -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ 14 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 512$$

$$V_{PABC} = \frac{1}{6}\left|det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}\right)\right| = \frac{256}{3}$$





Problema A.3.

Es dóna la funció real h definida per $h(x) = \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$

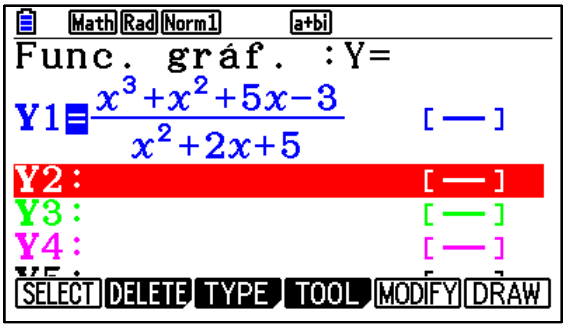
Obtingueu <u>raonadament, escrivint tots el passos del raonament utilitzat</u>:

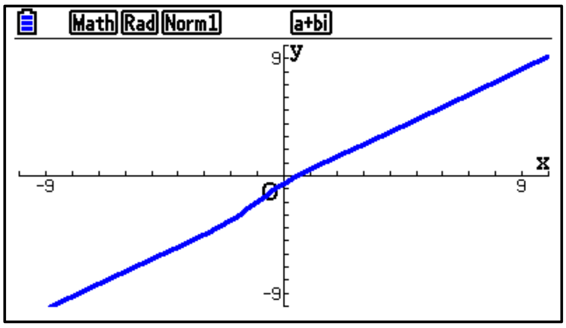
a) El domini de la funció h. Els límits $\lim_{x\to+\infty} h(x)$, $\lim_{x\to 0} h(x)$

b) L'asímptota de la corba $y = h(x)$

c) La primitiva de la funció h (és a dir $\int h(x)dx$) i l'àrea de la superfície tancada entre les rectes $y = 0, x = 1, x = 5$ i la corba $y = h(x)$

Solució:





a)

$Dom\ h(x) = \mathbb{R} \sim \{x \,/\, x^2 + 2x + 5 = 0\} = \mathbb{R}$

No té asímptotes verticals.

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{0 + 0 + 0 - 3}{0 + 0 + 5} = \frac{-3}{5}$$

b)

Té una asímptota obliqua ja que en la fracció algebraica el grau del numerador menys el grau del denominador és 1.

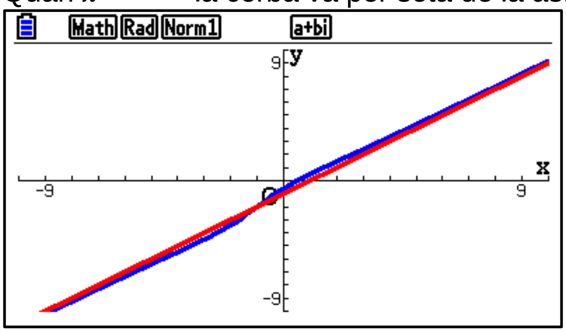
Efectuant la divisió

$$\frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} = x - 1 + \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 5}$$

L'asímptota obliqua és la recta $y = x - 1$

Quan $x \to +\infty$ la corba va per dalt de la asímptota.

Quan $x \to -\infty$ la corba va per sota de la asímptota.

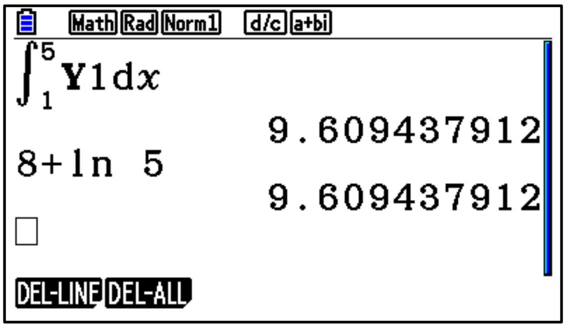


c)
La integral indefinida és:

$$\int \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}dx = \int x-1dx + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x^2+2x+5| + C$$

L'àrea de la superfície és:

$$\int_1^5 \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x^2+2x+5|\Big]_1^5 = \frac{25}{2} - 5 + \ln 40 - \left(\frac{1}{2} - 1 + \ln 8\right)$$
$$= 8 + \ln 5 \approx 9.61$$



Problema B.1.

Es donen les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ i $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Obtingueu raonadament, escrivint tots el passos del raonament utilitzat:

a) Els valors de a per als quals l'equació matricial $AX = aX$ sols admet una solució
b) Totes les solucions de l'equació matricial $AX = 5X$
c) La comprovació que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ és una solució de l'equació matricial $AX = 2X$ i, sense calcular la matriu A^{100}, el valor de β tal que $A^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

a)

$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} X = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$

$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} X - a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1-a & 4 \\ -1 & 6-a \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

L'equació matricial té solució única quan

$det\begin{pmatrix} 1-a & 4 \\ -1 & 6-a \end{pmatrix} \neq 0$

$(1-a)(6-a) + 4 \neq 0$

$-a^2 - 7a + 10 \neq 0$

Resolent l'equació:

$a \neq 5, 2$

b)

$a = 5$, l'equació té infinites solucions:

$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-4x + 4y = 0$

Resolent l'equació:

$\begin{cases} x = \mu \\ y = \mu \end{cases}$

c)

Comprovem que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ és una solució de l'equació matricial $AX = 2X$

$\begin{pmatrix} 1-2 & 4 \\ -1 & 6-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A^2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2A\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2^2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A^3\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2^2 A\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2^3\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aleshores, $\beta = 2^{100}$

Problema B.2.

Es donen en l'espai la recta $r \equiv \frac{x-a}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta}$ i el pla $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$

Obtingueu raonadament, escrivint tots el passos del raonament utilitzat:

a) La posició relativa de la recta r i el pla π en funció dels paràmetres a i β

b) La distància entre la recta r i el pla π quan $a = 6$ i $\beta = 3$

c) L'equació del pla que passa per $(0, 0, 0)$ i que no talla el pla π

Solució:

a)

Un punt de la recta $r \equiv \frac{x-a}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta}$ és $P(a, 0, 0)$ i el vector director és $v_r = (-1, -4, \beta)$

El vector característic del plànol $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$ és $w_\pi = (1, 2, 3)$

La recta r i el pla π són secants si

$v_r \cdot w_\pi \neq 0$

$(-1, -4, \beta)(1, 2, 3) \neq 0$

$-1 - 8 + 3\beta \neq 0$

$\beta \neq 3$

Aleshores, si $\beta \neq 3, \forall\, a \in \mathbb{R}$ el plànol i la recta són secants, es tallen en un punt.

Si $\beta = 3$ i el punt $P(a, 0, 0)$ pertany al plànol $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$, la recta r està continguda en el plànol $a + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 6$

Resolent l'equació $a = 6$

Aleshores, si $\beta = 3,\ a = 6$ la recta està continguda en el plànol.

si $\beta = 3,\ a \neq 6$ la recta i el plànol són paral·lels.

b)

Si $a = 6$ i $\beta = 3$ la recta està continguda en el plànol.

Aleshores, $d(r, \pi) = 0$

c)

El plànol que cerquem té el mateix vector característic que $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$

La seua equació és:

$(x - 0) + 2(y - 0) + 3(z - 0) = 0$

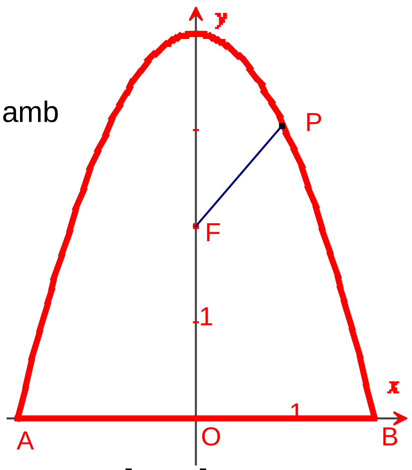
Simplificant:

$x + 2y + 3z = 0$

Problema B.3.
Un projectil està unit al punt $(0,2)$ per una corda elàstica i tensa. El projectil recorre la corba $y = 4 - x^2$ d'extrems $(-2,0)$ i $(2,0)$.
Obtingueu raonadament, escrivint tots el passos del raonament utilitzat:

a) La funció de la variable x que espressa la distància entre un punt qualsevol $(x, 4 - x^2)$ de la corba $y = 4 - x^2$ i el punt $(0,2)$
b) Els punts de la corba $y = 4 - x^2$ a major distància absoluta del punt $(0,2)$ per a $-2 \le x \le 2$
c) Els punts de la corba $y = 4 - x^2$ a menor distància absoluta del punt $(0,2)$ per a $-2 \le x \le 2$
d) L'àrea de la superfície per la que s'ha mogut la corda elàstica, és a dir, l'àrea compresa entre les corbes $y = 4 - x^2$ i $y = 2 - |x|$ quan $-2 \le x \le 2$

Solució:
Siga el punt $F(0, 2)$ el sortidor.



L'arc $y = 4 - x^2$ és una paràbola convexa els seus punts de tall amb l'eix d'abscisses són:
$y = 0$, $4 - x^2 = 0$. Resolent l'equació;
$x = \pm 2$.
Els punts de tall amb l'eix d'abscisses són els punts $A(-2,0)$ i $B(2,0)$.

a)
Siga el punt $F(0, 2)$

Un punt qualsevol de l'arc $y = 4 - x^2$ té coordenades $P(x, 4 - x^2)$ on $x \in [-2, 2]$.

$\overline{FP} = \sqrt{x^2 + (4 - x^2 - 2)^2}$.

La distància de qualsevol punt de l'arc a F és:

$d(x) = \sqrt{x^2 + (-x^2 + 2)^2}$, $x \in [-2, 2]$

$d(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$.

$$d'(x) = \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}}.$$

$d'(x) = 0$, $2x^3 - 3x = 0$. Resolent l'equació:

$$x = -\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

b)
Estudiant la monotonia de la funció:

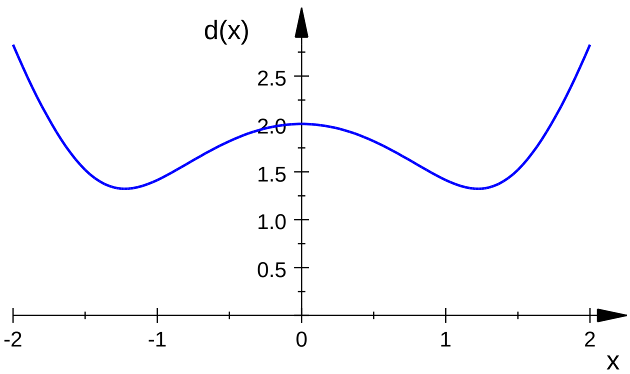
La funció és estrictament decreixent en $\left]-2, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right[\cup \left]0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right[$.

La funció és estrictament creixent en $\left]-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right[\cup \left]\sqrt{\frac{3}{2}}, 2\right[$.

Aleshores, $x = 0$ és un mínim relatiu.
$d(0) = 2$
$d(-2) = \sqrt{8}$, $d(2) = \sqrt{8}$

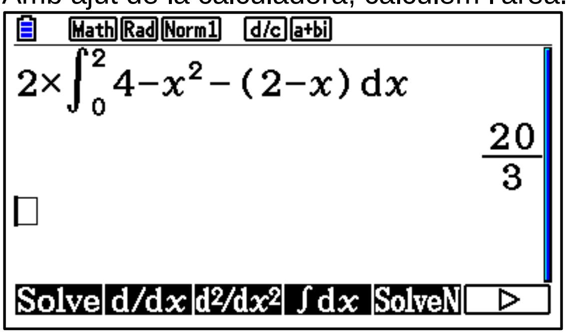
Aleshores, la major distancia s'assoleix quan $x = -2, 2$
Els punts de la corba on s'assoleixen els màxims són els punts $A(-2,0)$ i $B(2,0)$.

c)
$x = -\sqrt{\frac{3}{2}},\ \sqrt{\frac{3}{2}}$ són mínims relatius estrictes. També els absoluts.
$P_1\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$, $P_2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$.
En tots dos casos la mínima distància és:
$$d(P_1,F) = d(P_2,F) = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}+2\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$
Els punts de l'arc de la paràbola de mínima distancia són .
$P_1\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$, $P_2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$, ja que $d(P_1,F) = d(P_2,F) = \frac{\sqrt{7}}{2} < 2 = d(OF)$



d)
Siga $f(x) = 4 - x^2$
Siga $g(x) = 2 - |x| = \begin{cases} x+2 & si\ x<0 \\ -x+2 & si\ x \geq 0 \end{cases}$
Les dues funcions són simètriques respecte de l'eix d'abscisses.
L'àrea que cerquem és:
$$S = 2\int_0^2 \left(f(x) - g(x)\right)dx = 2\int_0^2 (4-x^2) - (-x+2))dx =$$
$$= 2\int_0^2 -x^2 + x + 2dx = 2\left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right)\Big]_0^2 = 2 \cdot \frac{10}{3} = \frac{20}{3}$$

Amb ajut de la calculadora, calculem l'àrea.



Amb ajut de la calculadora definim i representem les funcions
$f(x) = 4 - x^2$, $g(x) = 2 - |x|$
Amb ajut de la funció *G-Solv* calculem l'àrea entre la intersecció de les dues corbes.