Problema A1

Ens donen la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depèn del paràmetre real a i una matriu quadrada B d'ordre 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B$, sent I la matriu identitat d'ordre 3

Obtingueu raonadament escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) El rang de la matriu A en funció del paràmetre a i el determinant de la matriu $2A^{-1}$ quan $a = 1$

b) Totes les solucions del sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ quan $a = -1$

c) La comprovació que B és invertible, trobant m i n tals que $B^{-1} = mB + nI$

Solució:

a)

$|A| = a^2 + a - 2a^2 + 2a + 3a^2 + 3a - 2a + 2 = 2a^2 + 4a + 2$

$|A| = 2(a+1)^2$.

Si $a \neq -1$, $rangA = 3$.

$a = -1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, considerem el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Aleshores, $rangA = 2$

Siga $a = 1$, $|A| = 8$

$|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{8}$

$|2A^{-1}| = |2I \cdot A^{-1}| = |2I| \cdot |A^{-1}| = 8 \cdot \dfrac{1}{8} = 1$

b)

Si $a = 1$, $rangA = 2$

Per calcular el rang de la matriu ampliada $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)$ calculem el determinant format per la 1ª, 2ª i 4ª columna:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Aleshores, $rangA' = 2$

Aplicant el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema és compatible indeterminat.

La segona equació depèn de la primera i tercera:

$\begin{cases} x - z = -1 \\ -3x - 2y - z = 0 \end{cases}$

$E_2 \equiv 3E_1 + E_2$

$\begin{cases} x - z = -1 \\ -2y - 4z = -3 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -1 + \beta \\ y = \dfrac{3}{2} - 2\beta \\ z = \beta \end{cases}$

c)
Demostrem que la matriu B és invertible:
$B^2 = \frac{1}{3}I - 2B$
$B^2 + 2B = \frac{1}{3}I$
$B(B+2I) = \frac{1}{3}I$

$|B(B+2I)| = \left|\frac{1}{3}I\right|$
$|B| \cdot |B+2I| = \frac{1}{27}$
Aleshores, $|B| \neq 0$, Per tant B té inversa.
$B(B+2I)3 = I$
La inversa de B és $B^{-1} = (B+2I)3 = 3B + 6I$
Aleshores, $m = 3, n = 6$

Problema A2

Considerem en l'espai les rectes $r \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ i $s \equiv x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$

Obtingueu raonadament escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) L'equació del pla que conté les rectes *r* i *s*.
b) La recta que passa per $P(0, -1, 2)$ i talla perpendicularment a la recta *r*.
c) Els valors que han de tenir els paràmetres *a* i *b* perquè la recta *s* estiga continguda en el pla $\pi \equiv x - 2y + az = b$

Solució:

a)

Estudiem la posició relativa de les rectes *r* i *s*.

$r \equiv \begin{cases} x - y = -3 \\ 2x - z = -3 \end{cases}$, $r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 3 + \alpha \\ z = 3 + 2\alpha \end{cases}$ Un punt de la recta és $A(0, 3, 3)$ i la direcció és el vector $v_r = (1, 1, 2)$

Un punt de la recta $s \equiv x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$ és $B(0, -1, 2)$ i la direcció és el vector $v_s = (1, 1, 2)$

$\{v_r, v_s\}$ són linealment dependents.

$\overrightarrow{AB} = (0, -4, -1)$

$\{v_r, \overrightarrow{AB}\}$ són linealment independents ja que les components no són proporcionals

$\frac{1}{0} \neq \frac{-1}{-4}$

Aleshores, les rectes *r* i *s* són paral·leles.

L'equació del plànol que les conté passa pel punt $A(0, 3, 3)$ i té direcció $\{v_r, \overrightarrow{AB}\}$ la seua equació és:

$\pi \equiv (x, y, z) = (0,3,3) + \alpha(1,1,2) + \beta(0, -4, -1)$

b)

Considerem un punt general Q de la recta r:

$Q(\alpha, 3 + \alpha, 3 + 2\alpha)$

$\overrightarrow{PQ} = (\alpha, 4 + \alpha, 1 + 2\alpha)$

Els vectors $\overrightarrow{PQ}, v_r$ són ortogonals, $\overrightarrow{PQ} \cdot v_r = 0$

$\alpha + 4 + \alpha + 2 + 4\alpha = 0$. Resolent l'equació:

$\alpha = -1$

El vector director de la recta és:

$\overrightarrow{PQ} = (-1,3,-1)$

L'equació de la recta que passa per $P(0, -1, 2)$ i talla perpendicularment a la recta *r* és:

$(x, y, z) = (0, -1,2) + \alpha(-1, 3, -1)$

c)

Si la recta s està continguda en el plànol, el vector director de la recta és ortogonal al vector característic del plànol i el punt $B(0, -1, 2)$ de la recta pertany al plànol.

El vector característic del plànol és: $u_{\pi=}(1, -2, a)$

$u_\pi \cdot v_s = 0$

$(1, -2, a)(1,1,2) = 0$

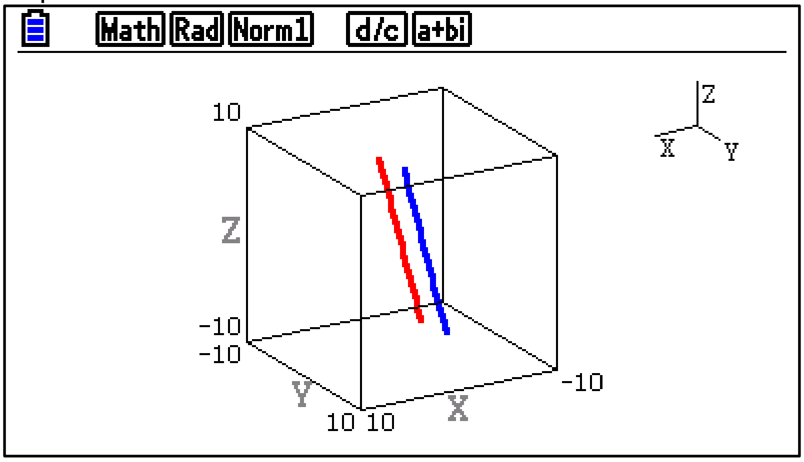
$1 - 2 + 2a = 0$

Resolent l'equació: $a = \frac{1}{2}$

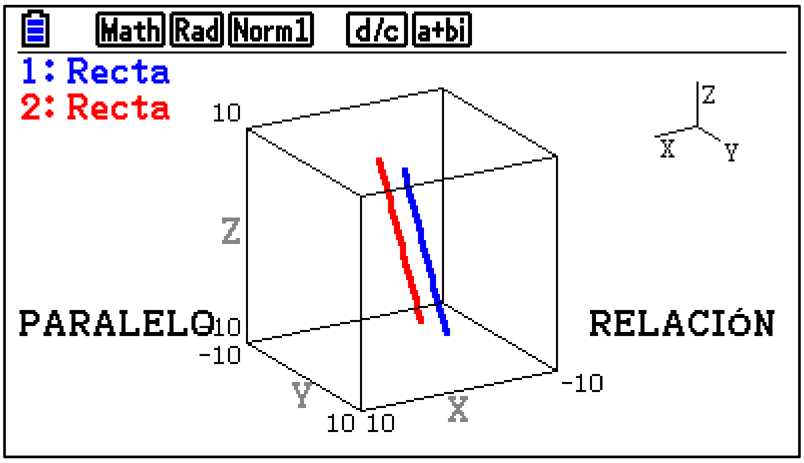
$B(0, -1, 2)$ pertany al plànol:

$0 + 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 = b$. Resolent l'equació: $b = 3$

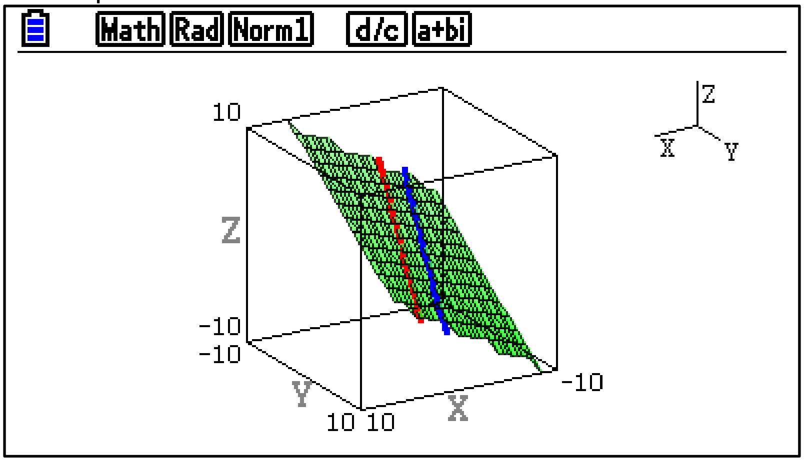
Representació de les rectes r i s.



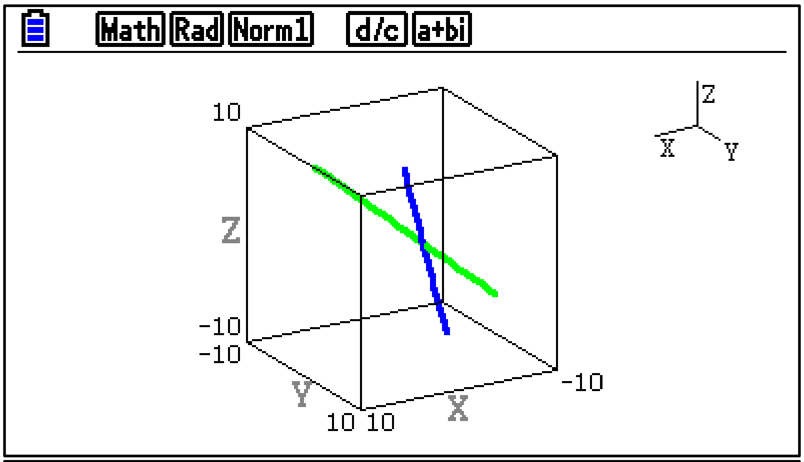
Posició relativa de les rectes r i s.

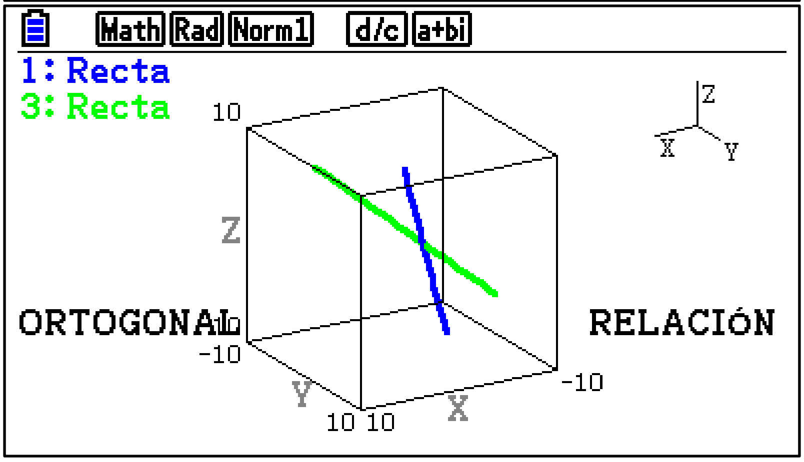


Pànol que conté les rectes r i s

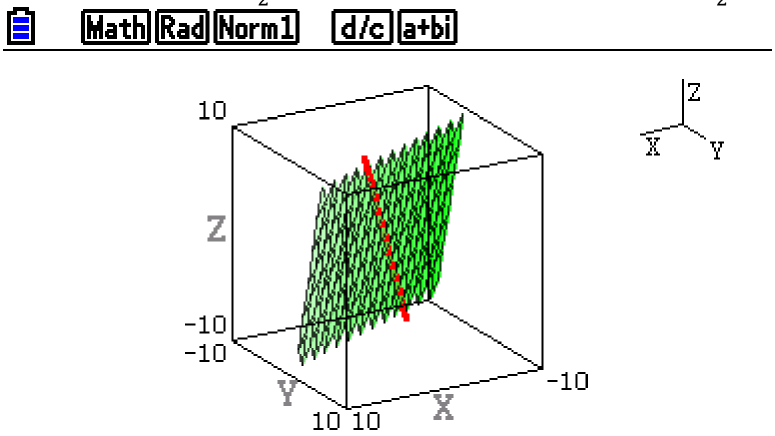


Recta r i recta que talla ortogonalment a r i passa pel punt $P(0, -1, 2)$





Planol $\pi \equiv x - 2y + \frac{1}{2}z = 3$ que conté $s \equiv x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$



Problema A3
Es considera la funció $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$
Obtingueu raonadament escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) Les asímptotes, intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims relatius de $f(x)$
b) La representació de la gràfica de $f(x)$
c) El valor del paràmetre a perquè es puga aplicar el teorema de Rolle en l'interval $[0, 1]$ a la funció $g(x) = f(x) + ax$
d) El valor de les integrals $\int f(x)dx$ i $\int x \cdot e^{-x}dx$

a)
La funció $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$ és contínua en $\mathbb{R}$ (producte de funcions contínues)
Aleshores, la funció no té asímptotes verticals.
Determinem si la funció té asímptotes horitzontals:

$$\lim_{x\to+\infty} x \cdot e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x^2}} \underset{\frac{\infty}{\infty} Hôpital}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x \cdot e^{x^2}} = 0$$

La asímptota és $y = 0$.
La funció va per dalt de la asímptota.

$$\lim_{x\to-\infty} x \cdot e^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{x^2}} \underset{\frac{\infty}{\infty} Hôpital}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2x \cdot e^{x^2}} = 0$$

La asímptota és $y = 0$.
La funció va per sota de la asímptota.

Determinem la monotonia de la funció:
$f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 \cdot e^{-x^2} = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$

$e^{-x^2} > 0$
Aleshores, la funció és estrictament creixent quan $f'(x) > 0$, és a dir,
quan $1 - 2x^2 > 0$. Resolent la inequació:

$$x \in \left] \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right[$$

La funció és estrictament decreixent quan $f'(x) < 0$, quan $1 - 2x^2 < 0$. Resolent la inequació:

$$x \in \left] -\infty, \frac{-\sqrt{2}}{2} \right[\cup \left] \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty \right[$$

$f'(x) = 0$ quan $x = \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Si $x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ la funció $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$ és contínua i la funció passa de decreixent a creixent, aleshores,
$x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ és un mínim relatiu estricte.

$$f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}$$

El mínim s'assoleix en el punt $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}\right)$

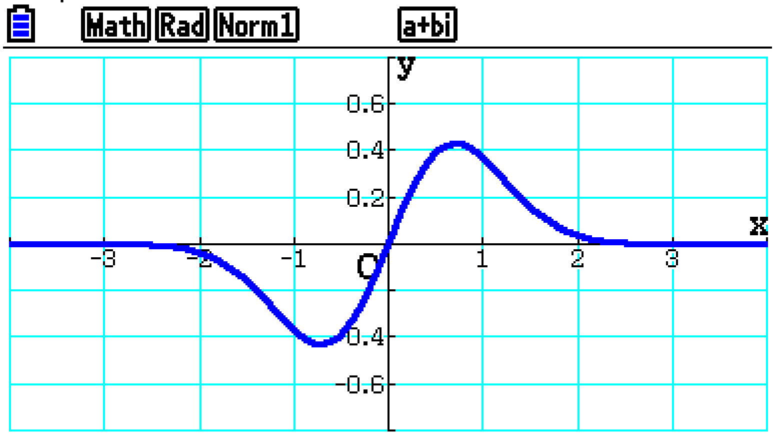
Si $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ la funció $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$ és contínua i la funció passa de creixent a decreixent, aleshores,
$x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ és un màxim relatiu estricte.

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}$$

El mínim s'assoleix en el punt $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}\right)$

b)

La representació de la funció és:



c)

Teorema de Rolle

Siga una funció $f: [a, b] \to R$, contínua en $[a, b]$ i derivable en $]a, b[$ tal que $f(a) = f(b)$. Aleshores, existeix $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$

Siga $g(x) = f(x) + ax\ x \in [0, 1]$

La funció és contínua en $x \in [0, 1]$ ja que és suma de funcions contínues.

La funció és derivable en $x \in]0, 1[$ja que és suma de funcions derivables.

$$g(0) = f(0) + a \cdot 0 = 0$$

$$g(1) = f(1) + a \cdot 1 = \frac{1}{e} + a$$

El teorema de Rolle es pot aplicar quan $g(0) = g(1)$

$$0 = \frac{1}{e} + a$$

És a dir, quan $a = -\frac{1}{e}$

d)

La integral $\int f(x)dx$ és immediata:

$$\int f(x)dx = \int x \cdot e^{-x^2}\ dx = -\frac{1}{2}\int -2x \cdot e^{-x^2}\ dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

Per integrar $\int x \cdot e^{-x}dx$ aplicarem el mètode d'integració per parts:

Siga $u = x,\ du = dx,\ dv = e^{-x}dx,\ v = -e^{-x}$

$$\int x \cdot e^{-x}dx = -x \cdot e^{-x} - \int -e^{-x}dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C = -(x+1)e^{-x} + C$$

Problema B1

Es dona el sistema $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 3x+4y+5z=5 \\ 7x+9y+11z=a \end{cases}$ on a és un paràmetre real.

Obtingueu raonadament escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) Els valors de a per als quals el sistema és compatible i els valors de a per als quals el sistema és incompatible.
b) Totes les solucions del sistema quan siga compatible.
c) La discussió de la compatibilitat i determinació del nou sistema deduït de l'anterior en canviar el coeficient 11 per qualsevol altre número diferent.

Solució:

a)

La matriu de coeficients del sistema és:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

$|A|=0$

Considerem el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1\neq 0$

Aleshores, $rangA=2$

Considerem el determinant format per les columnes C_1, C_2, C_4 de la matriu ampliada

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & a \end{vmatrix}=a-14$$

Si $a=14$, $rangA'=2$, aplicant el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema és compatible indeterminat.

Si $a\neq 14$, $rangA'=3$, aplicant el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema és incompatible.

b)

Si $a=14$, el sistema és compatible indeterminat.

La tercera equació depèn de les dues primeres:

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ 3x+4y+5z=5 \end{cases}$$

Resolem el sistema pel mètode de Gauss.

Efectuem $E_2\equiv 3\cdot E_1-E_2$

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ -y-2z=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=11+\alpha \\ y=-7-2\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$$

c)

La matriu de coeficients del sistema és:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & b \end{pmatrix}$$

$|A|=b-11$

Si $b=11$ i $a=14$, $rangA=2$ $rangA'=2$, aplicant el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema és compatible indeterminat.

Si $b=11$ i $a\neq 14$, $rangA=2$ $rangA'=3$, aplicant el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema és incompatible.

Si $b\neq 11$ i $\forall a$, $rangA=3$ $rangA'=3$, aplicant el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema és compatible determinat.

Problema B2
Siga π el pla d'equació $\pi \equiv 9x + 12y + 20z = 180$
Obtingueu raonadament escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) Les equacions dels dos plans paral·lels a π que disten 4 unitats de π
b) Els punts $A, B\ i\ C$, intersecció del pla π amb els eixos OX, OY, i OZ i l'angle que formen els vectors $\overrightarrow{AB}\ i\ \overrightarrow{AC}$
c) El volum del tetraedre els vèrtexs del qual són l'origen O de coordenades i els punts $A, B\ i\ C$

Solució:
a)
Considerem un plànol general paral·lel al plànol π, la seua equació és:
$\pi_D \equiv 9x + 12y + 20z + D = 0$
Determinem un punt del plànol π.
$P(20,0,0) \in \pi$
$d(\pi, \pi_D) = d(P, \pi_D) = 4$
$$\left|\frac{9 \cdot 20 + 0 + 0 + D}{\sqrt{9^2 + 12^2 + 20^2}}\right| = 4$$
$|180 + D| = 100$
Resolent l'equació:
$D = -80, D = -280$
Aleshores, els plànols que cerquem són:
$\pi_1 \equiv 9x + 12y + 20z - 80 = 0$
$\pi_2 \equiv 9x + 12y + 20z - 280 = 0$
b)
Determinem la intersecció del plànol π amb l'eix OX resolent el sistema:
$$\begin{cases} 9x + 12y + 20z = 180 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$ La solució és el punt $A(20, 0, 0)$
Determinem la intersecció del plànol π amb l'eix OY resolent el sistema:
$$\begin{cases} 9x + 12y + 20z = 180 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$ La solució és el punt $B(0, 15, 0)$
Determinem la intersecció del plànol π amb l'eix OZ resolent el sistema:
$$\begin{cases} 9x + 12y + 20z = 180 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$ La solució és el punt $C(0, 0, 9)$

$\overrightarrow{AB} = (-20, 15, 0)$
$\overrightarrow{AC} = (-20\ , 0, 9)$
Per calcular l'angle α que formen els dos vectors utilitzarem el producte escalar:
$(-20, 15, 0)(-20, 0,9) = \sqrt{(-20)^2 + 15^2}\sqrt{(-20)^2 + 9^2} \cdot \cos\alpha$
$$\cos\alpha = \frac{16}{\sqrt{481}}$$
$$\alpha = \arccos\frac{16}{\sqrt{481}} \approx 43°9'$$
c)
Calculem el volum del tetraedre de vèrtexs O, A, B, C
$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right]\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 450u^3$$

Problema B3

Les coordenades inicials de dos mòbils A i B són $(0,0),(250,0)$, respectivament i 1 km és la distància des de l'origen de coordenades a cadascun dels punts $(1,0),(0,1)$

El mòbil A es desplaça sobre l'eix OY des de l'origen al punt $\left(0,\frac{375}{2}\right)$ amb una velocitat de 30 km/h i, simultàniament, el mòbil B es desplaça sobre l'eix OX, des de la seua posició inicial fins a l'origen de coordenades amb una velocitat de 40 km/h

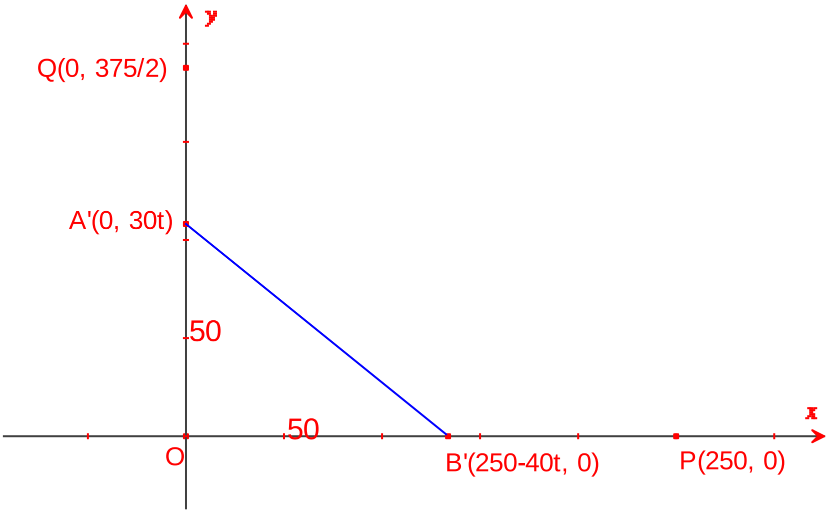
Obtingueu raonadament escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) La distància f(t) entre els dos mòbils A i B durant el desplaçament en funció del temps en hores des de que van començar a desplaçar-se

b) El temps T que tarden els mòbil en desplaçar-se des de la seua posició inicial a la seua posició final, i els intervals de creixement i de decreixement de la funció f(t) al llarg del trajecte.

c) Els valors de t per als quals la distància dels mòbils, és màxima i mínima durant el desplaçament, i aquestes distàncies màxima i mínima.

Solució:



Siga $Q\left(0,\frac{375}{2}\right)$ el punt final del mòbil A

Siga $P(250,0)$ el punt inicial del mòbil B.

Els dos mòbils ixen simultàniament.

En l'instant t el mòbil A es trobarà en el punt $A'(0,30t)$

En l'instant t el mòbil B es trobarà en el punt $B'(250-40t,0)$

a)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $A'\overset{\Delta}{O}B'$:

$$f(t)=\sqrt{(30t)^2+(250-40t)^2}$$

$$f(t)=\sqrt{2500t^2-20000t+62500}$$

b)

El mòbil A per anar de O a Q tarda:

$$T_A=\frac{\frac{375}{2}}{30}=6.25\ h$$

El mòbil B per anar de P a O tarda:

$$T_B=\frac{250}{40}=6.25\ h$$

Totsdós mòbils tarden el mateix temps en fer el recorregut.

c)

$f(t)=\sqrt{2500t^2-20000t+62500}$ $t\in[0,6.25]$

La funció $y=\sqrt{x}$ és contínua i creixent.

El mínim de la funció $f(t)=\sqrt{2500t^2-20000t+62500}$ s'assoleix en el mínim de la funció $g(t)=2500t^2-20000t+62500$, $t\in[0,6.25]$

La funció $g(t)=2500t^2-20000t+62500$ és una paràbola còncava. El mínim s'assoleix en el vèrtex:

$t=\frac{20000}{2\cdot 2500}=4h$

La distància mínima és $f(4)=\sqrt{2500\cdot 4^2-20000\cdot 4+62500}=150\ km$

El màxim de la funció $f(t)=\sqrt{2500t^2-20000t+62500}$ s'assoleix en el màxim de la funció $g(t)=2500t^2-20000t+62500$, $t\in[0,6.25]$

El màxim de la funció $g(t)=2500t^2-20000t+62500$ s'assoleix en algun o els dos extrems de l'interval de definició:

$g(0)=52500, g(6.25)=35156.25$

El màxim s'assoleix quan $t=0$

El màxim de la funció és $f(0)=250\ km$

c)

$f(t)=\sqrt{2500t^2-20000t+62500}$ $t\in[0,6.25]$

Calculem el màxim i el mínim de la funció derivant-la:

$f'(t)=\frac{5000t-20000}{2\sqrt{2500t^2-20000t+62500}}$

$f'(t)=0$

$5000t-20000=0$

Resolent l'equació:

$t=4\ h$

La funció és creixent quan $t\in\,]4,6.25[$

La funció és decreixent quan $t\in\,]0,4[$

El mínim s'assoleix quan $t=4h$.

La distància mínima és

$f(4)=\sqrt{2500\cdot 4^2-20000\cdot 4+62500}=150\ km$

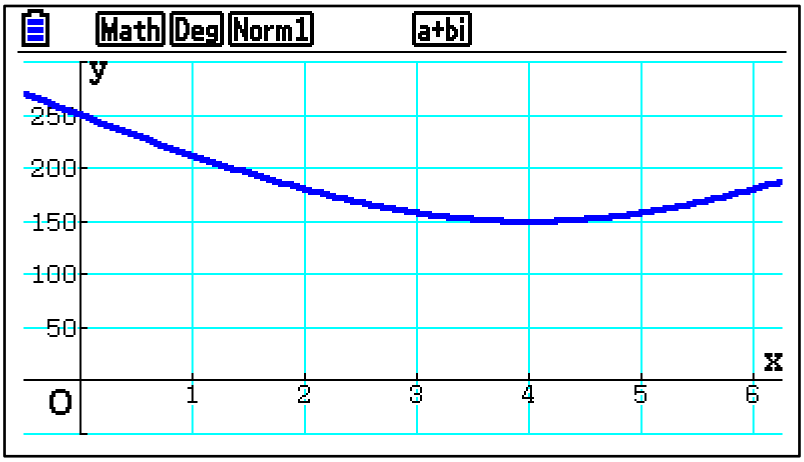
El màxim de la funció $f(t)=\sqrt{2500t^2-20000t+62500}$ s'assoleix en algun o els dos extrems de l'interval de definició:

$f(0)=250, f(6.25)=\frac{375}{2}$

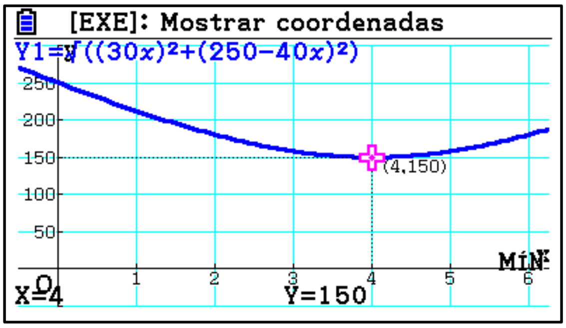
El màxim s'assoleix quan $t=0$

El màxim de la funció és $f(0)=250\ km$

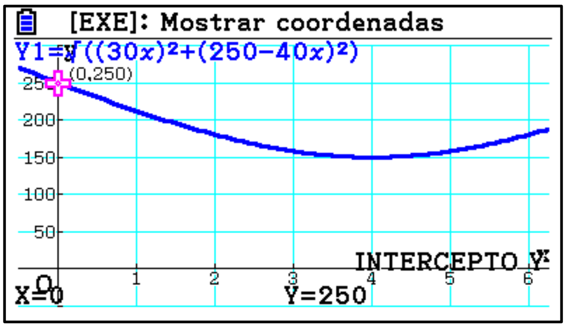
$f(x) = \sqrt{(30x)^2 + (250 - 40x)^2}$

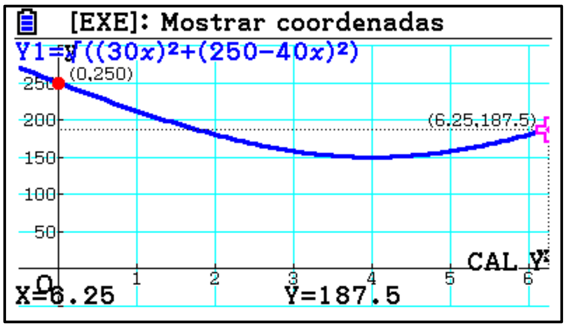


El mínim de la funció



Màxim de la funció.





Funció $f(x) = \sqrt{(30x)^2 + (250 - 40x)^2}$i la seua derivada