Problema 1

Donat el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \\ ax+y+z=-2 \end{cases}$, on a és un paràmetre real,

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat.

a) L'estudi del sistema en funció del paràmetre a
b) Les solucions del sistema quan $a=-2$
c) La solució del sistema quan $a=0$

Problema 2

Es donen la recta $r \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$ i els punts $P(1,0,0)$, $Q(2,1,a)$

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat.

a) El valor d'a perquè la recta que passa per P i Q siga paral·lela a r.
b) L'equació del plànol que conté P i Q i és paral·lel a r, quan $a=1$
c) La distància del punt Q al plànol que passa per P i és perpendicular a r, quan $a=1$

Problema 3

Es dóna la funció f definida per $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}$

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat.

a) El domini i les asímptotes de la funció f.
b) La integral $\int f(x)dx$, així com la primitiva de $f(x)$ la gràfica de la qual passa pel punt $(2,0)$
c) L'àrea de la regió limitada per la corba $y=f(x)$ i les rectes $y=0, x=2, x=4$

Problema 4

Es donen les matrius $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}$, que depenen del paràmetre real b

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat.

a) Els valors de b perquè cadascuna de les matrius AB i BA tinga inversa.
b) Els valors de b perquè la matriu A^tA tinga inversa, sent A^t la matriu transposada d'A
c) La inversa de la matriu A^tA, quan aquesta inversa existeix.

Problema 5

Es donen el plànol $\pi \equiv 2x+y-z-5=0$ i els punts $A(1,2,-1), B(2,1,0)$

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat.

a) L'equació implícita del plànol que passa pels punts A, B i és perpendicular a π
b) Les equacions paramètriques de la recta r que és perpendicular a π i passa per A.
c) La distància entre B i la recta r.

Problema 6

En un triangle isòsceles, els dos costats iguals mesuren 10 centímetres cadascun.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat.

a) L'expressió de l'àrea $A(x)$ del triangle, en funció de la longitud x del tercer costat.
b) Els intervals de creixement i decreixement de la funció $A(x)$, $0 \le x \le 20$
c) La longitud x del tercer costat perquè l'àrea del triangle siga màxima i el valor d'aquesta àrea.

Problema 1

Donat el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \\ ax+y+z=-2 \end{cases}$, on a és un paràmetre real,

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat.

a) L'estudi del sistema en funció del paràmetre a
b) Les solucions del sistema quan $a=-2$
c) La solució del sistema quan $a=0$

Solució:

a)

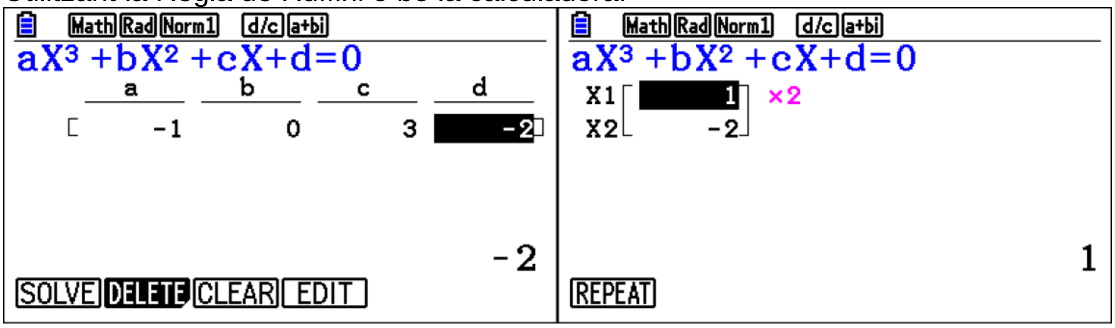
Considerem la matriu A de coeficients i la matriu ampliada A':

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix},\ A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$\det A=-a^3+3a-2$

$\det A=0$

Utilitzant la Regla de Ruffini o bé la calculadora:



Les solucions són:

$a=1,1,-2$

Si $a\neq 1,-2$

Aleshores, $rang\ A=rang\ A'=3=núm\ incògnites$

El sistema és compatible determinat.

Si $a=1$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$rang\ A=1, rang\ A'=2$

El sistema és incompatible.

Si $a=-2$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Considerant el menor de la matriu A format per la 1ª i 2ª fila i 1ª i 2ª columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-3\neq 0$$

Considerant el menor de la matriu A' format per la 1ª , 2ª 3ªfila i 1ª, 2ª i 4ª columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$$

Aleshores,

$rang\ A=rang\ A'=2<núm\ incògnites$

El sistema és compatible indeterminat. Té infinites solucions i depenen d'un paràmetre.

b)

$a = -2$

Per l'apartat anterior el sistema és compatible indeterminat.

El sistema és equivalent al sistema format per la primera i segona equació:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

Per resoldre'l, utilitzarem el mètode de Gauss:

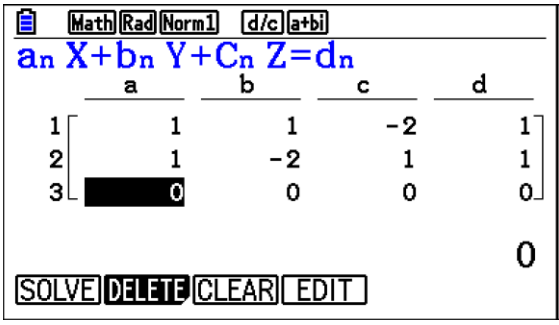
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{E_1 - E_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

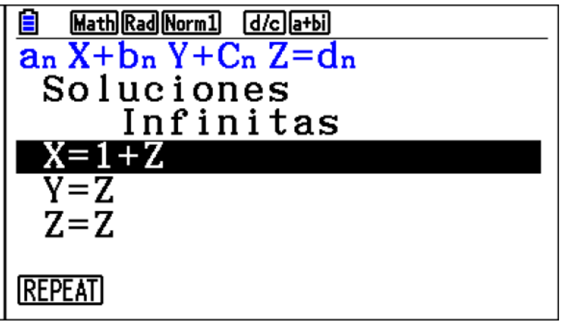
$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ \quad y - z = 0 \end{cases}$$

La solució del sistema és:

$$\begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = \mu \\ z = \mu \end{cases} , \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Amb la calculadora:





c)

$a = 0$

Per l'apartat anterior el sistema és compatible determinat.

Per resoldre'l, utilitzarem el mètode de Gauss:

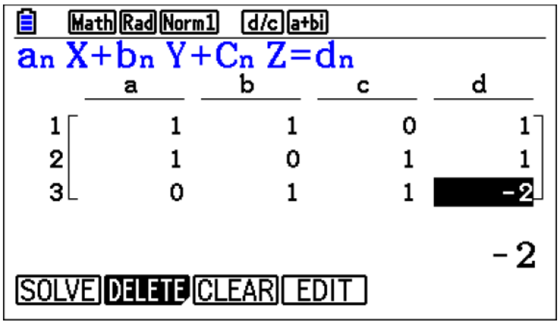
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{E_2 \equiv E_1 - E_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{E_3 \equiv E_2 - E_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

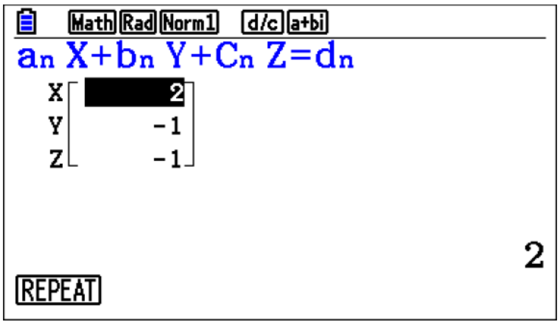
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y - z = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

La solució del sistema és:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Amb la calculadora:





Problema 2

Es donen la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ i els punts $P(1,0,0)$, $Q(2,1,a)$

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat.

a) El valor d'a perquè la recta que passa per P i Q siga paral·lela a r.

b) L'equació del plànol que conté P i Q i és paral·lel a r, quan $a = 1$

c) La distància del punt Q al plànol que passa per P i és perpendicular a r, quan $a = 1$

Solució:

a)

Un punt de la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ és $A(1,-1,0)$ i

el vector director és $v_r = (1,1,-1)$

$\overrightarrow{PQ} = (1,1,a)$

A fi que les rectes r, PQ siguen paral·leles, els vectors directors han de ser linealment dependents i el punt P no pertany a la recta r

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{a}{-1}$$

Resolent l'equació:

$a = -1$

Al substituir les coordenades de $P(1,0,0)$ en l'equació de la recta:

$$\frac{1-1}{1} \neq \frac{1}{1}$$

b)

Siga $a = 1$

$\overrightarrow{PQ} = (1,1,1)$

$\{\overrightarrow{PQ}, v_r\}$ són linealment independents.

L'equació del plànol que conté P i Q i és paral·lel a r té direcció $\{\overrightarrow{PQ}, v_r\}$ i passa pel punt P.

$\pi \equiv (x,y,z) = (1,0,0) + \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,-1)$

c)

Siga $a = 1$

El plànol que passa per P i és perpendicular a r té vector característic el vector director de la recta $v_r = (1,1,-1)$

L'equació és:

$\sigma \equiv (x-1) + (y-0) - (z-0) = 0$

$\sigma \equiv x + y - z - 1 = 0$

La distància del punt Q al plànol σ és:

$$d(Q,\sigma) = \left|\frac{2+1-1-1}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Problema 3

Es dóna la funció f definida per $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}$

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat.

a) El domini i les asímptotes de la funció f.

b) La integral $\int f(x)dx$, així com la primitiva de $f(x)$ la gràfica de la qual passa pel punt $(2, 0)$

c) L'àrea de la regió limitada per la corba $y = f(x)$ i les rectes $y = 0, x = 2, x = 4$

Solució:

El domini de la funció $f(x)$ és:

$Dom\ f(x) = \mathbb{R} \sim \{x \in \mathbb{R}, x^2(x-1) = 0\} = \mathbb{R} \sim \{0, 1\}$

La funció no té punts de tall amb l'eix d'ordenades.

La funció no té punts de tall amb l'eix d'abscisses ja que $x^2 + 1 \neq 0$

La funció té asímptotes verticals.

$x = 0, x = 1$

Quan $x = 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty.$

Quan $x = 1$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty.$

La funció té asímptotes horitzontals, ja que el grau del numerador és menor que el grau del denominador.

Les asímptotes són:

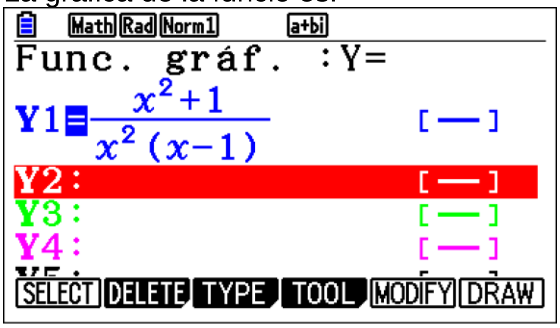
La recta $y = 0$ quan la variable x s'aproxima a menys infinit.

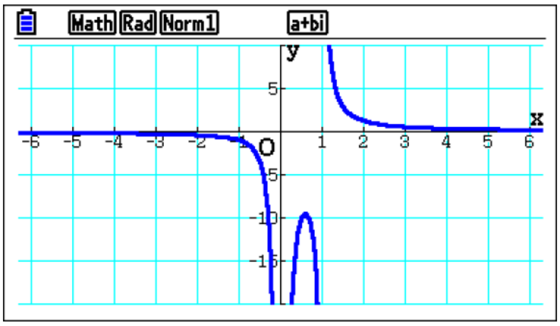
La funció va per sota de l'asímptota.

La recta $y = 0$ quan la variable x s'aproxima a més infinit.

La funció va per dalt de l'asímptota.

La gràfica de la funció és:





b)

Fem la descomposició de la funció en fraccions simples:

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

$x^2 + 1 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2$

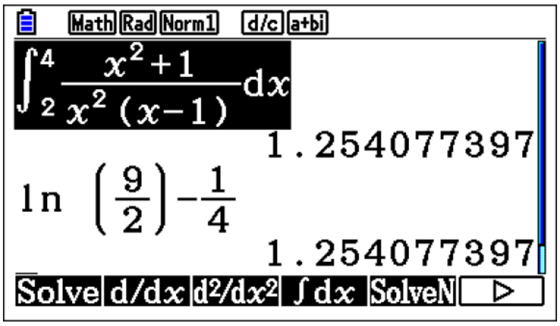
Si $x = 0$

$1 = -B$, aleshores: $B = -1$

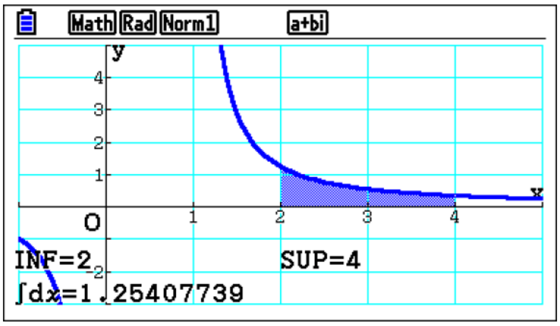
Si $x = 1$
$2 = C$
Si $x = 2$
$5 = 2A + B + 4C$
$5 = 2A - 1 + 8$
$A = -1$
Aleshores:
$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x-1}$$

La integral indefinida és:
$$\int f(x)dx = \int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x-1}\right)dx = -\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + K$$

Calculem la primitiva que passa pel punt $(2, 0)$
$$0 = -\ln|2| + \frac{1}{2} + 2\ln|2-1| + K$$
$$K = \ln 2 - \frac{1}{2}$$
La primitiva és:
$$F(x) = -\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + \ln 2 - \frac{1}{2}$$
c)
La funció és positiva en l'interval $]1, +\infty[$
L'àrea és:
$$\int_2^4 f(x)dx = \int_2^4 \left(\frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x-1}\right)dx = = -\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1|\Big|_2^4 =$$
$$= \left(-\ln 4 + \frac{1}{4} + 2\ln 3\right) - \left(-\ln 2 + \frac{1}{2}\right) = \ln\frac{9}{2} - \frac{1}{4} \approx 1.2541$$



Gràficament:



Problema 4

Es donen les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}$, que depenen del paràmetre real b

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat.

a) Els valors de b perquè cadascuna de les matrius AB i BA tinga inversa.
b) Els valors de b perquè la matriu $A^t A$ tinga inversa, sent A^t la matriu transposada d'A
c) La inversa de la matriu $A^t A$, quan aquesta inversa existeix.

Solució:

a)

Una matriu M té inversa si i només si $\det(M) \neq 0$, $M^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (Adj(M))^t$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{pmatrix}$$

$\det(AB) = 0$

Aleshores, $\forall\, b \in \mathbb{R}$ la funció no té inversa.

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{pmatrix}$$

$\det(BA) = -2b^2 + 12$

$\det(BA) \neq 0$ quan $b \neq \pm\sqrt{6}$

Aleshores, $\forall\, b \in \mathbb{R} \sim \{\sqrt{6}, -\sqrt{6}\}$ la funció té inversa.

b)

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 + 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$\det(A^t A) = 8(b^2 + 2) \neq 0$

Aleshores, $\forall\, b \in R$ la matriu $A^t A$ té inversa.

c)

$$Adj(A^t A) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & b^2 + 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(Adj(A^t A)\right)^t = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & b^2 + 2 \end{pmatrix}$$

$$(A^t A)^{-1} = \frac{1}{8(b^2 + 2)} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & b^2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b^2 + 2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Problema 5
Es donen el plànol $\pi \equiv 2x+y-z-5=0$ i els punts $A(1,2,-1), B(2,1,0)$
Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat.

a) L'equació implícita del plànol que passa pels punts A, B i és perpendicular a π
b) Les equacions paramètriques de la recta r que és perpendicular a π i passa per A.
c) La distància entre B i la recta r.

Solució:
a)
$\overrightarrow{AB}=(1,-1,1)$
El vector característic del plànol $\pi \equiv 2x+y-z-5=0$ és $a_\pi=(2,1,-1)$
Els vectors $\{\overrightarrow{AB}, a_\pi\}$ són linealment independents ja que les components no són proporcionals:
$\frac{1}{2} \neq \frac{1}{1}$
El plànol que passa pels punts A, B i és perpendicular a π passa pel punt A i té direcció $\{\overrightarrow{AB}, a_\pi\}$
La seua equació implícita és:
$$\sigma \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$
Simplificant:
$\sigma \equiv y+z-1=0$
b)
La recta r que és perpendicular a π i passa per A, té vector director el característic del plànol, $a_\pi=(2,1,-1)$
L'equació paramètrica és:
$$r \equiv \begin{cases} x=1+2\alpha \\ y=2+\alpha \\ z=-1-\alpha \end{cases}$$

c)
Calculem el punt projecció del punt B sobre la recta r que és la intersecció de la recta r i el plànol π

$$\begin{cases} 2x+y-z-5=0=0 \\ \qquad \begin{cases} x=1+2\alpha \\ y=2+\alpha \\ z=-1-\alpha \end{cases} \end{cases}$$

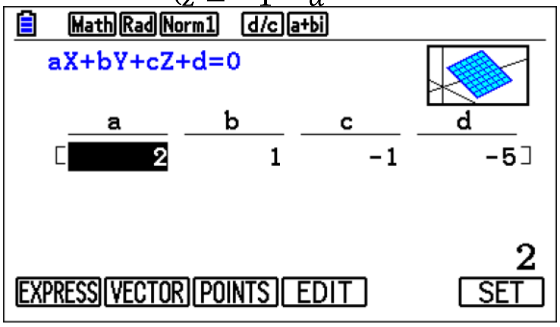
$2(1+2\alpha)+2+\alpha-(-1-\alpha)-5=0$
Simplificant:
$\alpha=0$
Notem que el punt de projecció és el punt *A*.
$d(B,r)=d(A,B)=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\|1,-1,1)\|=\sqrt{3}$

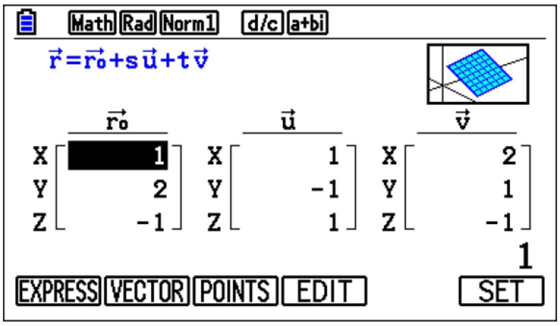
Altra forma:
$$d(B,r)=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\times a_\pi\right\|}{\|a_\pi\|}$$

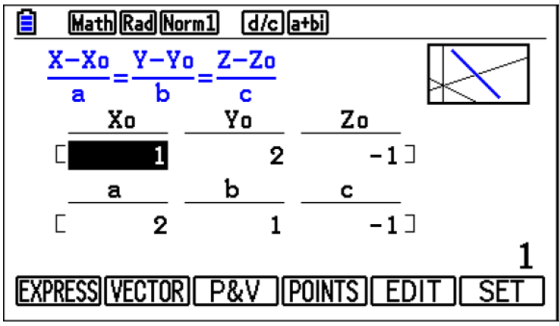
$$\overrightarrow{AB} \times a_\pi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0,3,3)$$

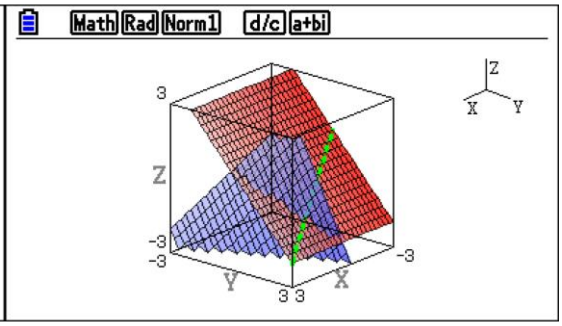
$$d(B,r) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times a_\pi\|}{\|a_\pi\|} = \frac{\|(0,3,3)\|}{\|(2,1,-1)\|} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{3}$$

Gràficament.
Definim:
El plànol $\pi \equiv 2x + y - z - 5 = 0$,
El plànol σque $A(1,2,-1)$ i té direcció $\{\overrightarrow{AB} = (1,-1,1), a_\pi = (2,1,-1)\}$
La recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = -1 - \alpha \end{cases}$

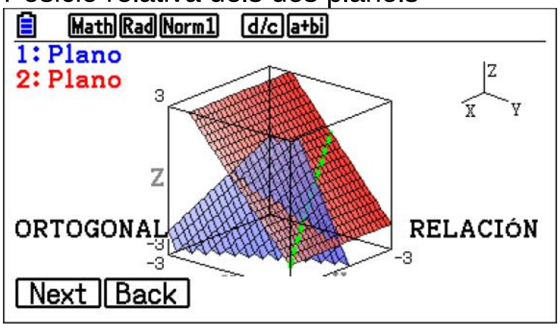




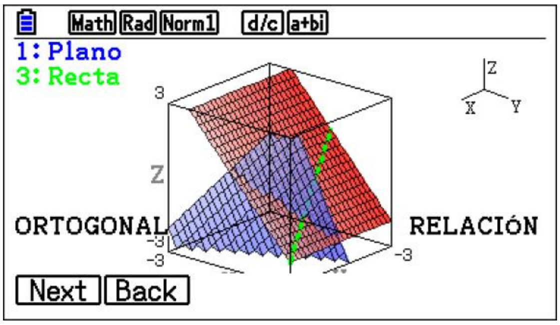




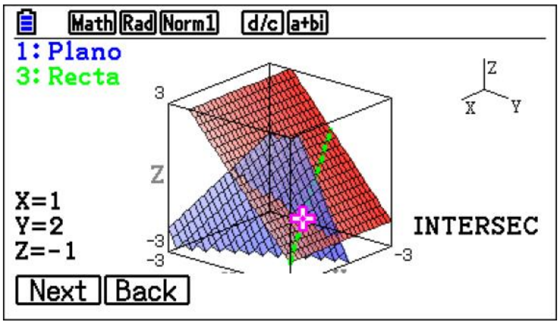
Posició relativa dels dos plànols



Posició relativa del plànol $\pi \equiv 2x + y - z - 5 = 0$, i la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = -1 - \alpha \end{cases}$



Intersecció del $\pi \equiv 2x + y - z - 5 = 0$, i la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = -1 - \alpha \end{cases}$



Notem que és el punt $A(1, 2, -1)$

Problema 6
En un triangle isòsceles, els dos costats iguals mesuren 10 centímetres cadascun. Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat.

a) L'expressió de l'àrea $A(x)$ del triangle, en funció de la longitud x del tercer costat.
b) Els intervals de creixement i decreixement de la funció $A(x)$, $0 \le x \le 20$
c) La longitud x del tercer costat perquè l'àrea del triangle siga màxima i el valor d'aquesta àrea.

Solució:
a)
Aplicant la fórmula d'Heró (càlcul de l'àrea d'un triangle)

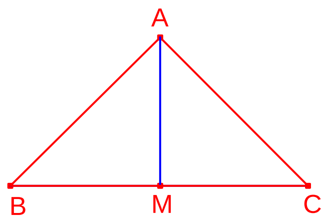
$$S(x) = \frac{\sqrt{(20+x)\cdot x \cdot x \cdot (20-x)}}{4}$$
$$S(x) = \frac{\sqrt{x^2(400-x^2)}}{4}, \quad 0 \le x \le 20$$

Una altra forma:

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}, \overline{AB} = \overline{AC} = 10, \overline{BC} = x$
Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}, M = 90°$

$$\overline{AM} = \sqrt{10^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{400-x^2}}{2}$$



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}x \cdot \frac{\sqrt{400-x^2}}{2} = \frac{x\sqrt{400-x^2}}{4}, 0 \le x \le 20$$

b)
La funció àrea és contínua.
Com que la funció $g(x) = \sqrt{x}$ és contínua i monòtona creixent.
Aleshores la monotonia de la funció àrea

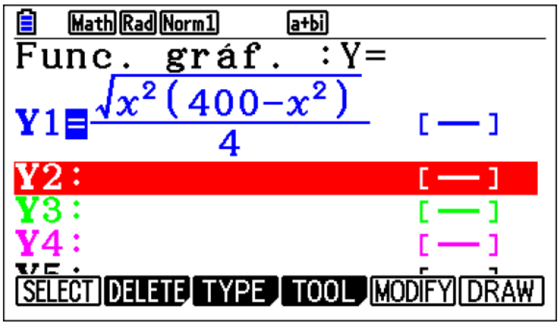
$$S(x) = \frac{\sqrt{x^2(400-x^2)}}{4}$$

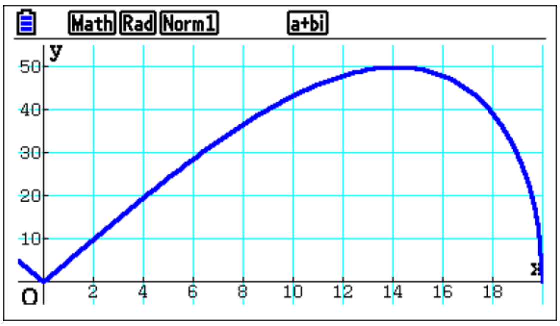
és igual a la monotonia de la funció $f(x) = x^2(400-x^2) = -x^4 + 400x^2, 0 \le x \le 20$
$f'(x) = -4x^3 + 800x$
$f'(x) = 0$
Resolent l'equació, $x = 0, \sqrt{200}$ (la tercera solució de l'equació no pertany al domini)
Estudiant el signe de la primera derivada:
$f'(x) > 0, x \in \left]0, \sqrt{200}\right[$
$f'(x) < 0, x \in \left]\sqrt{200}, 20\right[$
La funció àrea és estrictament creixent quan $x \in \left]0, \sqrt{200}\right[$
La funció àrea és estrictament decreixent quan $x \in \left]\sqrt{200}, +\infty\right[$

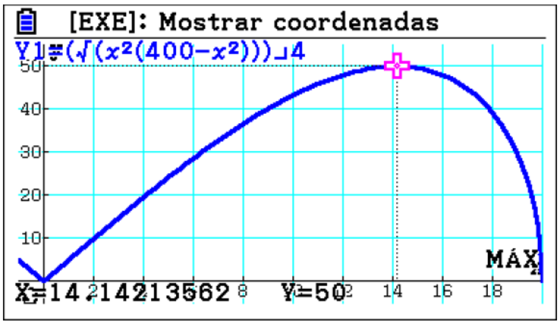
c)
El màxim de la funció àrea s'assoleix quan $x = \sqrt{200}$, en aquest punt la funció és contínua i passa de ser creixent a decreixent.
L'àrea màxima és:

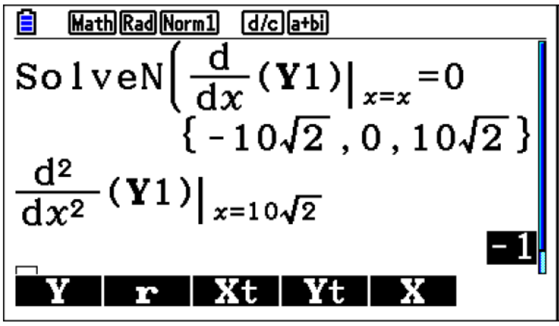
$$S\left(\sqrt{200}\right) = \frac{\sqrt{200(400-200)}}{4} = 50$$

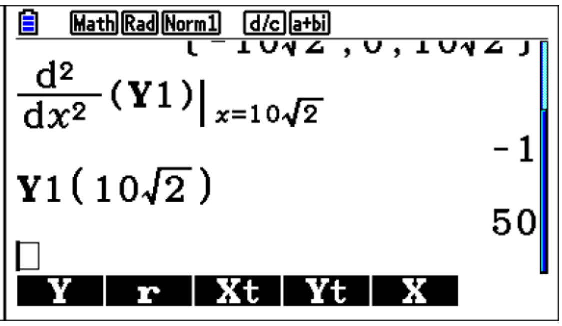
Gràficament.











El màxim de la funció àrea s'assoleix quan $x = 10\sqrt{2}$.
$S(10\sqrt{2}) = 50$

Altra forma de fer el problema:
Siga $\alpha = \angle BAC$
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$s(\alpha) = \frac{1}{2}10^2 \cdot \sin\alpha\,, \alpha \in [0, \pi]$
El màxim s'assoleix quan $\alpha = \frac{\pi}{2}$ és a dir, quan triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle
$A = 90°$
L'àrea màxima és:
$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}10^2 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 50$