Problema A1. setembre 2012

Siga el sistema d'equacions $S \equiv \begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ 3x + 10y - z = 0 \\ x + 14y + \alpha z = 0 \end{cases}$, on α és un paràmetre real.

Obteniu raonadament:
a) La solució del sistema S quan $\alpha = 0$.
b) El valor de α per al qual el sistema S té infinites solucions.
c) Totes les solucions del sistema S quan es dóna a α el valor obtingut en l'apartat b).

Problema B1. setembre 2012

Es donen les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i B, on B és una matriu de dues files i dues columnes que no té cap elements nul i que verifica $B^2 = -7B + U$.
Obteniu raonadament:
a) Els nombres reals a i b tals que $A^2 = aA + bU$.
b) Els nombres reals p i q tals que $B^{-1} = pB + qU$, i justifiqueu que la matriu B té inversa.
c) Obteniu els valors x i y per als quals es verifica que $B^3 = xB + yU$.

Problema A1. juny 2012

Es dóna el sistema $S \equiv \begin{cases} 2x + \quad \alpha^2 z = 5 \\ x + (1-\alpha)y + z = 1 \\ x + 2y + \alpha^2 z = 1 \end{cases}$, on α és un paràmetre real.

Obteniu raonadament:
a) La solució del sistema S quan $\alpha = 0$.
b) Totes les solucions del sistema S quan $\alpha = -1$.
c) El valor de α per al qual el sistema S és incompatible.

Problema B1. juny 2012

Obteniu raonadament:
a) Totes les solucions $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de l'equació: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
b) El determinant d'una matriu quadrada B de dues files, que té matriu inversa, i que verifica l'equació $B^2 = B$.
c) El determinant d'una matriu A que té quatre files i que verifica l'equació:
$A^2 - 9\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sabent a més que el determinant de A és positiu.

Problema A1. setembre 2011

Es donen les matrius $A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ i M, on M és una matriu de dues files i dues columnes que verifica $M^2=M$.

Obteniu raonadament:

a) Tots els valors reals k per als quals la matriu $B=A-k\cdot I$ té inversa.

b) La matriu inversa B^{-1} quan $k=3$.

c) Les constants reals α i β per a les quals es verifica que $\alpha A^2+\beta A=-2\cdot I$.

d) Comproveu raonadament que la matriu $P=I-M$ compleix les relacions:

$P^2=P$ i $MP=PM$.

Problema B1. setembre 2011

Es donen les matrius $M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ i T, i se sap que T és una matriu quadrada de 3 files i 3 columnes i el determinant del qual val $\sqrt{2}$.

Calculeu raonadament els determinants de les següents matrius, i indiqueu explícitament les propietats utilitzades en el seu càlcul:

a) $\frac{1}{2}T$.

b) M^4.

c) TM^3T^{-1}.

Problema A1. juny 2011

Siga el sistema $S\equiv\begin{cases}x+y+z=m\\ 2x+\quad 3z=2m+1\\ x+3y+(m-2)z=m-1\end{cases}$ on m és un paràmetre real.

Obtingueu raonadament:

a) Totes les solucions del sistema S quan $m=2$.

b) Tots els valors de m per als quals el sistema S té solució única.

c) El valor de m per al qual el sistema S admet la solució $(x,y,z)=\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0\right)$.

Problema B1. juny 2011

Es dona la matriu $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & m & 0\\ 2 & 1 & m^2-1\end{pmatrix}$, on m és un paràmetre real.

a) Obtingueu raonadament el rang o característica de la matriu A en funció dels valors de m.

b) Expliqueu per què és invertible la matriu A quan $m=1$.

c) Obtingueu raonadament la matriu inversa A^{-1} de A quan $m=1$, i indiqueu els distints passos per a l'obtenció de A^{-1}. Comproveu que els productes AA^{-1} i $A^{-1}A$ donen la matriu unitat.

Problema A1. setembre 2010

Donat el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} \alpha x + \alpha^3 y + z = 1 \\ \alpha x + \alpha y + z = 1 \\ \alpha^3 x + \alpha y + z = 1 \end{cases}$ en què α és un paràmetre real, és demana:

a) Deduir, raonadament, per a quins valors de α és compatible determinat.
b) Deduir, raonadament, per a quins valors de α és compatible indeterminat.
c) Resoldre el sistema en tots els casos en què és compatible indeterminat.

Problema B1. setembre 2010

Donades les matrius $A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ i $B(y) = \begin{pmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ y+2 & 6 & 2 \\ y+3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, es demana:

a) Obtindre raonadament el valor x per tal que el determinant de la matriu $A(x)$ siga 6.
b) Calcular raonadament el determinant de la matriu $2A(x)$.
c) Demostrar que la matriu $B(y)$ no té matriu inversa per a cap valor real de y.

Problema A1. juny 2010

Donades les matrius quadrades $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$, es demana:

a) Calcular les matrius $(A-I)^2$ i $A(A-2\cdot I)$.
b) Justificar raonadament que:
    b.1) Existeixen les matrius inverses de les matrius A i $A-2\cdot I$.
    b.2) No existeix matriu inversa de la matriu $A-I$.
c) Determinar el valor del paràmetre λ per al qual és verifica $A^{-1} = \lambda(A-2\cdot I)$.

Problema B1. juny 2010

Donat el sistema d'equacions lineals que depén dels paràmetres a, b i c.

$\begin{cases} 2ax + by + z = 3c \\ 3x - 2by - 2cz = a \\ 5ax - 2y + cz = -4b \end{cases}$, es demana:

a) Justificar raonadament que per als valors dels paràmetres $a = 0, b = -1, c = 2$ el sistema és incompatible.
b) Determinar raonadament els valors dels paràmetres a, b, i c, per als quals es verifica que $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ és solució del sistema.
c) Justificar si la solució $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ del sistema de l'apartat b) és o no, única.

Problema 1.1. setembre 2009.

Atesa la matriu $A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha - 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ \alpha & \alpha & -6 \end{pmatrix}$, es demana el següent:

a) Calculeu, en funció de α, el determinat de la matriu $A(\alpha)$, escrivint els càlculs necessaris.

b) Determineu, raonadament, els nombres reals α per als quals el determinant de la matriu inversa de $A(\alpha)$ és igual a $\frac{1}{66}$.

Problema 1.2. setembre 2009.

Atés el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \\ 5x+7y+\alpha z=0 \end{cases}$, es demana el següent:

a) Deduïu, raonadament, per a quins valors de α el sistema sols admet la solució $(x, y, z)=(0, 0, 0)$.

b) Determineu, raonadament, els nombres reals α que el fa indeterminat.

Problema 1.1. juny 2009.

Donades les matrius quadrades $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 18 & 48 & 12 \\ 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ i $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, es demana:

a) Justificar que la matriu A té inversa i obtindre raonadament la matriu inversa A^{-1}. En la resposta s'ha d'incloure tots els passos que porten a l'obtenció de A^{-1}.

b) Calcular, raonadament, el determinant de la matriu $3A^{-1}$. En la resposta s'han d'incloure tots els passos realitzats.

c) Obtindre raonadament els valors x, y, z que verifiquen l'equació $x \cdot I + y \cdot A + z \cdot A^2 = B$.

Problema 1.2. juny 2009.

Donat el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} (\alpha+3)x-4y-2z=4 \\ x-2y-(\alpha+2)z=2 \\ 2x+(\alpha-3)y-2z=4 \end{cases}$, es demana:

a) Justificar que per al valor $\alpha=0$ el sistema és incompatible.

b) Determinar els valors del paràmetre α per als quals el sistema és compatible determinat.

c) Resoldre el sistema per al valor del paràmetre α per al qual el sistema és compatible indeterminat.

Problema 1.1. setembre 2008.

Atesa la matriu $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ i el vector $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, es demana obtenir raonadament:

a) El vector X tal que $AX=0X$.

b) Tots els vectors X tals que $AX=3X$.

c) Tots els vectors X tals que $AX=2X$.

Problema 1.2. setembre 2008.

Atés el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} x+y+z=\alpha+3 \\ 2x-y+z=\alpha+1 \\ 3x+\alpha y+2z=4 \end{cases}$, es demana:

a) Proveu que és compatible per a tot valor de α.

b) Obteniu raonadament el valor α per al qual el sistema és indeterminat.

c) Resoleu el sistema quan $\alpha=0$, escrivint els càlculs necessaris per a això.

Problema 1.1. juny 2008.

Atés el sistema dependent del paràmetre real α $\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{cases}$, es demana el següent:

a) Determineu, raonadament, els valors de α per als quals el sistema és compatible determinat, compatible indeterminat i incompatible.
b) Resoleu el sistema quan és compatible determinat.
c) Obteniu, raonadament, la solució del sistema quan $\alpha = 0$.

Problema 1.2. juny 2008.

Siguen I i A les matrius quadrades següents: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$. Es demana que calculeu, escrivint explícitament les operacions necessàries:

a) Les matrius A^2 i A^3.
b) Els nombres reals α i β per als quals es verifica $(I + A)^3 = \alpha I + \beta A$.

Problema 1.1. setembre 2007.

Atés el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 5 \\ 3x + 4y + 6z = 3 \\ x + 3y + 2z = \alpha \end{cases}$, es demana el següent:

a) Justifiqueu que per a qualsevol valor del paràmetre real α, el sistema té solució única.
b) Trobeu la solució del sistema en funció del paràmetre α.
c) Determineu el valor de α per al qual la solució (x, y, z) del sistema satisfà $x + y + z = 1$.

Problema 1.2. setembre 2007.

Ateses les matrius $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ i $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, es demana el següent:

a) Obteniu raonadament tots els valors α per als quals $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ és l'única solució de l'equació matricial $AX = \alpha X$.
b) Resoleu l'equació matricial $AX = 2X$.

Problema 1.1. juny 2007.

Ateses les matrius $B(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ i $C(y) = \begin{pmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

a) Calculeu el determinant de la matriu $3B(x)$ i obteniu el valor de x per al qual el dit determinant val 162.
b) Demostreu que la matriu $C(y)$ no té inversa per a cap valor real de y.

Problema 1.2. juny 2007.

Atés el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} x+\alpha y+z=9 \\ 3x+5y+z=9 \\ \alpha x+y+z=9 \end{cases}$, es demana el següent:

a) Proveu que és sempre compatible, obtenint els valors de α per als quals és indeterminat.
b) Resoleu el sistema anterior per a $\alpha=7$.

Problema A.1. setembre 2006.
Donat el sistema d'equacions amb un paràmetre real λ i incògnites x, y, z,

$\begin{cases} (\lambda+2)x-y+z=0 \\ 3x+(\lambda+6)y-3z=0 \\ 5x+5y+(\lambda-2)z=0 \end{cases}$, es demana:

a) Calculeu per a quins valors de λ el sistema només admet la solució $(x, y, z)=(0, 0, 0)$.
b) Per a cada valor de λ que fa indeterminat el sistema, obteniu totes les seues solucions.
c) Expliqueu la posició relativa dels tres plans definits per cadascun de les equacions del sistema quan $\lambda=-3$.

Problema B.1. setembre 2006.

A és una matriu 3×3 tal que $A^2=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ i $A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Es demana:

a) Calculeu el determinant de la matriu A^3 i la inversa de A^3.
b) Calculeu la matriu $X=(x, y, z)$ que és solució de l'equació matricial $XA^3=BA^2$, en que B és la matriu fila $B=(1, 2, 3)$.
c) Calculeu la matriu inversa de A.

Problema A.1. juny 2006.

Donat el sistema d'equacions amb incògnites x, y, z, $\begin{cases} x+2y-3z=\alpha \\ 2x+6y-11z=2 \\ x-2y+7z=1 \end{cases}$ es demana:

a) Determineu raonadament el valor de α per al qual el sistema és compatible.
b) Per a aquest valor obtingut en a) de α, calculeu el conjunt de solucions del sistema.
c) Expliqueu la posició relativa dels tres plans definits per cadascuna de les tres equacions del sistema, en funció dels valors de α.

Problema B.1. juny 2006.

Donades les matrius $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ i $T=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ es demana:

a) Proveu que la matriu T té inversa, T^{-1}, i calculeu la dita matriu inversa T^{-1}.
b) Donada l'equació amb matriu incògnita B, $A=T^{-1}BT$, calculeu el determinant de B.
c) Obteniu els elements de la matriu B considerada en l'apartat b).

Problema A.1. setembre 2005.

Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7\\2\\-2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ i $E=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$, calculeu raonadament la matriu $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ que satisfà l'equació $(AB^t+C)X=(A^tD)E$, on M^t significa la matriu transposada de la matriu M.

Problema B.1. setembre 2005.

En el mercat podem trobar tres aliments preparats per a gats que es fabriquen posant, per quilo, les següents quantitats de carn, peix i verdura:

- Aliment *Migato*: 600 g de carn, 300g de peix i 100g de verdura.
- Aliment *Catomeal*: 300 g de carn, 400g de peix i 300g de verdura.
- Aliment *Comecat*: 200 g de carn, 600g de peix i 200g de verdura.

Si volem oferir al nostre gat 470 g de carn, 370 g de peix i 160 g de verdura per quilo d'aliment, quin percentatge de cadascun dels compostos anteriors hem de mesclar per obtenir la proporció desitjada?.

Problema A.1. juny 2005.

Calculeu $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$, que satisfan les equacions següents:

$\begin{cases}2AX-3AY=B\\AX-AY=C\end{cases}$, on $X=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1&y_2\\y_3&y_4\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2&-5\\-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-18&0\\11&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-17&-30\\10&18\end{pmatrix}$.

Problema B.1. juny 2005.

El sistema d'equacions lineals $\begin{cases}x+\alpha y+\alpha^2 z=1\\x+\alpha y+\alpha z=\alpha\\x+\alpha^2 y+\alpha^2 z=\alpha^2\end{cases}$ depén del paràmetre real α.

Discutiu per a quins valors de α és incompatible, compatible determinat i compatible indeterminat, i resoleu-lo en els casos compatibles.

Problema A.1. setembre 2004.

Calculeu tots els valors reals x, y, z, t per al quals es verifica $AX=XA$ on $X=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$ i $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$.

Problema A.1. setembre 2004.

Tenim les matrius $A=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\3&-5&6\\1&-1&0\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

a) Justifiqueu que existeix A^{-1}, inversa de A, i calculeu el determinant A^{-1}

b) Calculeu la matriu $B=A(A+4\cdot I)$

c) Determineu els nombres reals x, y, z, t que compleixen $A^{-1} = xA + y \cdot I$, $A^2 = zA + t \cdot I$.

Problema B.1. setembre 2004.

Donat el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} x - y + z = \lambda \\ \lambda x + 2y - z = 3\lambda \\ 2x + \lambda y - 2z = 6 \end{cases}$, amb λ paràmetre real:

a) Determineu raonadament per a quins valors de λ és compatible determinat, compatible indeterminat i incompatible.
b) Calculeu el conjunt de les solucions del sistema per al cas compatible determinat.
c) Calculeu el conjunt de solucions del sistema per al cas compatible indeterminat.

Problema A.1. juny 2004.
Determineu el valor real x per al qual es compleix la propietat següent:

El determinat de la matriu 2B és 160, on $B = \begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{pmatrix}$.

Problema B.1. juny 2004.

Tenim les matrius $A = \begin{pmatrix} 0 & m & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -(m+1) \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Per a quins valors reals de m és A inversible? Calculeu la matriu A^{-1}.
b) En la matriu anterior A amb $m = 0$, obteniu la matriu real quadrada X d'ordre 3 que satisfà la igualtat $B - AX = AB$.