Problema A1. setembre 2012

Siga el sistema d'equacions $S \equiv \begin{cases} x-2y-3z=0 \\ 3x+10y-z=0 \\ x+14y+\alpha z=0 \end{cases}$, on α és un paràmetre real.

Obteniu raonadament:
a) La solució del sistema S quan $\alpha = 0$.
b) El valor de α per al qual el sistema S té infinites solucions.
c) Totes les solucions del sistema S quan es dóna a α el valor obtingut en l'apartat b).

Solució:
Discutirem el sistema aplicant el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & 10 & -1 & 0 \\ 1 & 14 & \alpha & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{E_2 \equiv 3E_1 - E_2 \\ E_3 \equiv E_1 - E_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -16 & -8 & 0 \\ 0 & -16 & -3-\alpha & 0 \end{array}\right) \underset{E_3 \equiv E_2 - E_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -16 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-5 & 0 \end{array}\right).$$

Si $\alpha = 5$ el sistema és compatible indeterminat.
El sistema inicial és equivalent a:

$S \equiv \begin{cases} x-2y-3z=0 \\ -16y-8z=0 \end{cases}$ la solució del qual és: $\begin{cases} x = 2\mu \\ y = \dfrac{\mu}{2} \\ z = \mu \end{cases}$ on $\mu \in R$.

Si $\alpha \neq 5$ el sistema és compatible determinat.

Si $\alpha = 0$ el sistema és compatible determinat.
El sistema inicial és equivalent a:

$S \equiv \begin{cases} x-2y-3z=0 \\ -16y-8z=0 \\ -5z=0 \end{cases}$ la solució del qual és $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$.

Problema B1. setembre 2012

Es donen les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ i B, on B és una matriu de dues files i dues columnes que no té cap elements nul i que verifica $B^2=-7B+U$.
Obteniu raonadament:

a) Els nombres reals a i b tals que $A^2=aA+bU$.

b) Els nombres reals p i q tals que $B^{-1}=pB+qU$, i justifiqueu que la matriu B té inversa.

c) Obteniu els valors x i y per als quals es verifica que $B^3=xB+yU$.

a)

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$aA+bU=a\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & -a\\ a & a+b\end{pmatrix}.$$

Igualant els elements de les dues matrius:

$\begin{cases}a+b=0\\ -a=-2\\ a=2\end{cases}$. Resolent el sistema: $\begin{cases}a=2\\ b=-2\end{cases}$.

b)

$B^2=-7B+U$.

$B^2+7B=U$.

$B(B-7U)=U$.

Aleshores, la matriu B té inversa i és, $B^{-1}=B-7U$.

Aleshores, $\begin{cases}p=1\\ q=-7\end{cases}$.

c)

$B^2=-7B+U$. Multiplicant per B:

$BB^2=B(-7B)+BU$.

$B^3=-7B^2+B$.

$B^3=-7(-7B+U)+B$.

$B^3=50B-7U$.

Aleshores, $\begin{cases}x=50\\ y=-7\end{cases}$.

Problema A1. juny 2012

Es dóna el sistema $S \equiv \begin{cases} 2x + \quad \alpha^2 z = 5 \\ x + (1-\alpha)y + z = 1 \\ x + 2y + \alpha^2 z = 1 \end{cases}$, on α és un paràmetre real.

Obteniu raonadament:
a) La solució del sistema S quan $\alpha = 0$.
b) Totes les solucions del sistema S quan $\alpha = -1$.
c) El valor de α per al qual el sistema S és incompatible.

Solució:
Discutim el sistema segons el paràmetre α.
Calculem el determinant de la matriu de coeficients:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \alpha^2 \\ 1 & 1-\alpha & 1 \\ 1 & 2 & \alpha^2 \end{vmatrix} = -\alpha^3 + 3\alpha^2 - 4.$$

$|A| = 0$.

$-\alpha^3 + 3\alpha^2 - 4 = 0$.
Utilitzant la regla de Ruffini:
$\alpha = -1, 2, 2$.
Aleshores, si $\alpha \neq -1, 2$, $\text{rang}A = 3 = \text{núm.incògnites}$, $\text{rang}A' = 3$.
El sistema és compatible determinat.

Siga $\alpha = -1$. $\text{rang}A < 3$.

Considerem el menor format per les dues primers files i columnes, $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$.

Aleshores, $\text{rang}A = 2$.
Considerem el menor format per les columnes (1ª, 2ª i 4ª) de la matriu ampliada A':

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, aleshores, $\text{rang}A' = 2$

$\text{rang}A = \text{rang}A' = 2 < \text{núm.incògnites} = 3$ el sistema és compatible indeterminat.
La tercera equació depén de la 1ª i 2ª equació.
El sistema inicial és equivalent a:

$\begin{cases} 2x + \quad z = 5 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$.

Utilitzarem el mètode de Gauss per resoldre'l:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{E_2 \equiv E_1 - 2E_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -1 & 3 \end{array}\right)$. El sistema és equivalent:

$\begin{cases} 2x + \quad z = 5 \\ -4y - z = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} x = \dfrac{5-\mu}{2} \\ y = \dfrac{-3-\mu}{4} \\ z = \mu \end{cases}$, on $\mu \in R$.

Siga $\alpha = 2$. $\text{rang}A < 3$.

Considerem el menor format per les dues primers files i columnes, $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Aleshores, $\text{rang}A = 2$.

Considerem el menor format per les columnes (1ª, 2ª i 4ª) de la matriu ampliada A':

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$, aleshores, $\text{rang}A' = 3$

$\text{rang}A \neq \text{rang}A'$, aleshores, el sistema és incompatible.

a)

Siga $\alpha = 0$ els sistema és compatible determinat:

$\begin{cases} 2x = 5 \\ x + y + z = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = -\dfrac{3}{4} \\ z = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$.

Problema B1. juny 2012

Obteniu raonadament:

a) Totes les solucions $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de l'equació: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) El determinant d'una matriu quadrada B de dues files, que té matriu inversa, i que verifica l'equació $B^2 = B$.

c) El determinant d'una matriu A que té quatre files i que verifica l'equació:

$A^2 - 9\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sabent a més que el determinant de A és positiu.

Solució:

a)

Utilitzarem el mètode de Gauss per resoldre'l:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{E_2 \equiv E_1 - E_2 \\ E_3 \equiv E_1 - E_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{E_3 \equiv E_2 + E_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

El sistema és compatible indeterminat:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ -y - z = -2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = \alpha \end{cases}.$$

b)

B té inversa si $|B| \neq 0$.

$B^2 = B$. Multiplicant a les dues parts per la matriu inversa:

$B^{-1} \cdot B^2 = B^{-1} \cdot B$

$I \cdot B = I$.

$B = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Aleshores, $|B| = 1$.

c)

$$A^2 - 9\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = 9\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

$|A^2| = 9^4$.

$|A|^2 = 9^4$, per hipòtesi $|A| > 0$. Aleshores, $|A| = 9^2 = 81$.

Problema A1. setembre 2011

Es donen les matrius $A=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ i M, on M és una matriu de dues files i dues columnes que verifica $M^2=M$.
Obteniu raonadament:
a) Tots els valors reals k per als quals la matriu $B=A-k\cdot I$ té inversa.
b) La matriu inversa B^{-1} quan $k=3$.
c) Les constants reals α i β per a les quals es verifica que $\alpha A^2+\beta A=-2\cdot I$.
d) Comproveu raonadament que la matriu $P=I-M$ compleix les relacions:
$P^2=P$ i $MP=PM$.

Solució:
a)
$$B=A-k\cdot I=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}-k\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k & -2\\ 1 & 3-k\end{pmatrix}.$$
La matriu B té inversa si i només si $|B|\neq 0$.
$$|B|=\left|\begin{pmatrix}-k & -2\\ 1 & 3-k\end{pmatrix}\right|=k^2-3k+2.$$
Resolem $|B|=0$.
$k^2-3k+2=0$. La solució és:
$k=1,2$.
Aleshores, la matriu B té inversa quan $k\neq 1, 2$.
b)
Si $k=3$, $B=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.
$|B|=2$
$$\mathrm{Adj}B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix}.$$
$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}(\mathrm{Adj}B)^t=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2}\end{pmatrix}.$$
c)
$$A^2=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -6\\ 3 & 7\end{pmatrix}.$$
$$\alpha A^2+\beta A=\alpha\begin{pmatrix}-2 & -6\\ 3 & 7\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\alpha & -6\alpha-2\beta\\ 3\alpha+\beta & 7\alpha+3\beta\end{pmatrix}.$$
$$-2\cdot I=-2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}.$$

$\alpha A^2+\beta A=-2\cdot I$
$$\begin{pmatrix}-2\alpha & -6\alpha-2\beta\\ 3\alpha+\beta & 7\alpha+3\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}.$$

Igualant els elements de les dues matrius:

$\begin{cases} -2\alpha = -2 \\ -6\alpha - 2\beta = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0 \\ 7\alpha + 3\beta = -2 \end{cases}$, la solució és $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -3 \end{cases}$.

d)

$P = I - M$, $M^2 = M$.

$P^2 = (I - M)(I - M) = I \cdot I - I \cdot M - M \cdot I + M \cdot M = I - M - M + M^2 = I - 2M + M = I - M = P$.

$M \cdot P = M(I - M) = M \cdot I - M \cdot M = M - M^2 = M - M = 0$ (0 matriu nul·la).

$P \cdot M = (I - M)M = I \cdot M - M \cdot M = M - M^2 = M - M = 0$.

Aleshores, $MP = PM$.

Problema B1. setembre 2011

Es donen les matrius $M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ i T, i se sap que T és una matriu quadrada de 3 files i 3 columnes i el determinant del qual val $\sqrt{2}$.
Calculeu raonadament els determinants de les següents matrius, i indiqueu explícitament les propietats utilitzades en el seu càlcul:

a) $\frac{1}{2}T$.

b) M^4.

c) TM^3T^{-1}.

Solució:

Calculem $|M|=\left|\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}\right|=6$.

a)

Siga $T=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}T=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}c\\ \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}e & \frac{1}{2}f\\ \frac{1}{2}g & \frac{1}{2}h & \frac{1}{2}i\end{pmatrix}$.

$$\left|\frac{1}{2}T\right|=\left|\begin{pmatrix}\frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}c\\ \frac{1}{2}d & \frac{1}{2}e & \frac{1}{2}f\\ \frac{1}{2}g & \frac{1}{2}h & \frac{1}{2}i\end{pmatrix}\right| \underset{\frac{1}{2}\text{multiplica tres files}}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^3|T|=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

b)

Propietat: $\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)$.

$\det\left(M^4\right)=\left(\det(M)\right)^4=6^4=1296$.

c)

$T\cdot T^{-1}=I$.

$\det\left(T\cdot T^{-1}\right)=\det(I)=1$.

$\det(T)\cdot\det(T^{-1})=1$.

$\det\left(TM^3T^{-1}\right)=\det(T)\cdot\left(\det(M)\right)^3\cdot\det(T^{-1})=6^3\cdot\det(T)\cdot\det(T^{-1})=6^3\cdot 1=6^3=216$.

Problema A1. juny 2011

Siga el sistema $S \equiv \begin{cases} x+y+z=m \\ 2x+\quad 3z=2m+1 \\ x+3y+(m-2)z=m-1 \end{cases}$ on m és un paràmetre real.

Obtingueu raonadament:
a) Totes les solucions del sistema S quan $m=2$.
b) Tots els valors de m per als quals el sistema S té solució única.
c) El valor de m per al qual el sistema S admet la solució $(x, y, z)=\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$.

Solució:
a)

Si $m=2$ substituint el valor en el sistema: $S \equiv \begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+\quad 3z=5 \\ x+3y=1 \end{cases}$.

El resoldrem pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{E_2 \equiv 2E_1-E_2 \\ E_3 \equiv E_1-E_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{E_3 \equiv E_2+E_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema és equivalent a:

$S \equiv \begin{cases} x+y+z=2 \\ \quad 2y-z=-1 \end{cases}$, aleshores, el sistema és compatible indeterminat.

La solució és: $\begin{cases} x=\dfrac{5-3\alpha}{2} \\ y=\dfrac{-1+\alpha}{2} \\ z=\alpha \end{cases}$, on $\alpha \in R$.

b)
El sistema tindria solució única si fóra de Cramer, és a dir, si el determinant de la matriu A dels coeficients és distint de zero.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m-2 \end{vmatrix}=-2m+4.$$

$|A|=0$, quan $-2m+4=0$, és a dir, quan $m=2$.
Aleshores, el sistema és compatible determinat quan $m \neq 2$.
c)
Els valors $(x, y, z)=\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ satisfan les 3 equacions:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2}+\left(\dfrac{-1}{2}\right)+0=m \\ 2\left(\dfrac{3}{2}\right)+3\cdot 0=2m+1 \\ \dfrac{3}{2}+3\left(\dfrac{-1}{2}\right)+(m-2)0=m-1 \end{cases}$$

. Simplificant: $\begin{cases} m=1 \\ 3=2m+1 \\ 0=m-1 \end{cases}$. $m=1$.

Aleshores, si $m = 1$ l'única solució del sistema és $(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$.

Problema B1. juny 2011

Es dona la matriu $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2-1 \end{pmatrix}$, on m és un paràmetre real.

a) Obtingueu raonadament el rang o característica de la matriu A en funció dels valors de m.
b) Expliqueu per què és invertible la matriu A quan $m = 1$.
c) Obtingueu raonadament la matriu inversa A^{-1} de A quan $m = 1$, i indiqueu els distints passos per a l'obtenció de A^{-1}. Comproveu que els productes AA^{-1} i $A^{-1}A$ donen la matriu unitat.

Solució:
a)
Calculem el determinant de la matriu A:

$$|A| = \left|\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2-1 \end{pmatrix}\right| = -m^3 - m = -m(m^2+1)$$

$|A| = 0$, $-m(m^2+1) = 0$, l'única solució és $m = 0$.

Si $|A| \neq 0$, $\text{rang}A = 3$.

Aleshores, si $m \neq 0$ $\text{rang}A = 3$.

Siga $m = 0$ $|A| = 0$, aleshores, $\text{rang}A < 3$.

El menor $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, aleshores, $\text{rang}A \geq 2$. Aleshores:

Si $m = 0$ $\text{rang}A = 2$.

b)
Una matriu A té inversa si $|A| \neq 0$, en l'apartat anterior si $m \neq 0$.

Per tant, si $m = 1$ la matriu té inversa.

c)
Si $m = 1$, aleshores, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $|A| = -2$.

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj}A)^t$. $\text{Adj}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Calculem AA^{-1} i $A^{-1}A$:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Problema A1. setembre 2010

Donat el sistema d'equacions lineals $\begin{cases}\alpha x+\alpha^3 y+z=1\\ \alpha x+\alpha y+z=1\\ \alpha^3 x+\alpha y+z=1\end{cases}$ en què α és un paràmetre real,

és demana:
a) Deduir, raonadament, per a quins valors de α és compatible determinat.
b) Deduir, raonadament, per a quins valors de α és compatible indeterminat.
c) Resoldre el sistema en tots els casos en què és compatible indeterminat.

Solució:
a)
El sistema té el mateix nombre d'equacions que d'incògnites.
El sistema és compatible determinat si és de Cramer, és a dir, si el determinant de la matriu A de coeficients és distint de zero.

$$|A|=\begin{vmatrix}\alpha & \alpha^3 & 1\\ \alpha & \alpha & 1\\ \alpha^3 & \alpha & 1\end{vmatrix}=\alpha^2\begin{vmatrix}1 & \alpha^2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ \alpha^2 & 1 & 1\end{vmatrix}\underset{C_3\equiv C_3-C_1}{=}\alpha^2\begin{vmatrix}1 & \alpha^2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ \alpha^2 & 1 & 1-\alpha^2\end{vmatrix}=\alpha^2(1-\alpha^2)\begin{vmatrix}1 & \alpha^2\\ 1 & 1\end{vmatrix}.$$

$|A|=\alpha^2(1-\alpha^2)(1-\alpha^2)$.

$|A|=0$, si $\alpha^2(1-\alpha^2)(1-\alpha^2)=0$. Resolent l'equació, $\alpha=-1,0,1$.

Aleshores, el sistema és compatible determinat si $\alpha\neq-1,0,1$.

b) c)

Siga $\alpha=-1$, $\begin{cases}-x-y+z=1\\ -x-y+z=1\\ -x-y+z=1\end{cases}$ La segona i tercera equació són iguals a la primera.

Aleshores el sistema és $-x-y+z=1$, el sistema és compatible indeterminat.

La solució és $\begin{cases}x=-1-\lambda+\mu\\ y=\lambda\\ z=\mu\end{cases}$, on λ,μ són paràmetres reals.

Siga $\alpha=0$, $\begin{cases}z=1\\ z=1\\ z=1\end{cases}$ La segona i tercera equació són iguals a la primera.

Aleshores el sistema és $z=1$, el sistema és compatible indeterminat.

La solució és $\begin{cases}x=\lambda\\ y=\mu\\ z=1\end{cases}$, on λ,μ són paràmetres reals.

Siga $\alpha=1$, $\begin{cases}x+y+z=1\\ x+y+z=1\\ x+y+z=1\end{cases}$ La segona i tercera equació són iguals a la primera.

Aleshores el sistema és $x+y+z=1$, el sistema és compatible indeterminat.

La solució és $\begin{cases}x=1-\lambda-\mu\\ y=\lambda\\ z=\mu\end{cases}$, on λ,μ són paràmetres reals.

Problema B1. setembre 2010

Donades les matrius $A(x)=\begin{pmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ i $B(y)=\begin{pmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ y+2 & 6 & 2 \\ y+3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, es demana:

a) Obtindre raonadament el valor x per tal que el determinant de la matriu $A(x)$ siga 6.

b) Calcular raonadament el determinant de la matriu $2A(x)$.

c) Demostrar que la matriu $B(y)$ no té matriu inversa per a cap valor real de y.

Solució:

a)

$$|A(x)|=\left|\begin{pmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{pmatrix}\right|=2\left|\begin{pmatrix} x+2 & 2 & 3 \\ x+2 & 3 & 2 \\ x+3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\right| \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1}}{=} 2\left|\begin{pmatrix} x+2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\right|=2x-6$$

$|A(x)|=6$.

$2x-6=6$. Resolent l'equació:

$x=6$.

b)

$$2\cdot A(x)=\begin{pmatrix} 2(x+2) & 2\cdot 4 & 2\cdot 3 \\ 2(x+2) & 2\cdot 6 & 2\cdot 2 \\ 2(x+3) & 2\cdot 8 & 2\cdot 2 \end{pmatrix}$$

Totes les files estan multiplicades per 2. Aplicant propietats de determinant:

$$|2\cdot A(x)|=\left|\begin{pmatrix} 2(x+2) & 2\cdot 4 & 2\cdot 3 \\ 2(x+2) & 2\cdot 6 & 2\cdot 2 \\ 2(x+3) & 2\cdot 8 & 2\cdot 2 \end{pmatrix}\right|=2^3\,|A(x)|=8(2x-6).$$

c)

Una matriu té inversa si i només si el seu determinant és distint de zero.

$$|B(y)|=\left|\begin{pmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ y+2 & 6 & 2 \\ y+3 & 8 & 1 \end{pmatrix}\right|=2\left|\begin{pmatrix} y+1 & 2 & 3 \\ y+2 & 3 & 2 \\ y+3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\right| \underset{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1}}{=} 2\left|\begin{pmatrix} y+1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\right| \underset{\text{files2i3LD.}}{=} 0.$$

Aleshores, $B(y)$ no té matriu inversa per a cap valor real de y.

Problema A1. juny 2010

Donades les matrius quadrades $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ i $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\-3&-3&-2\end{pmatrix}$, es demana:

a) Calcular les matrius $(A-I)^2$ i $A(A-2\cdot I)$.

b) Justificar raonadament que:

b.1) Existeixen les matrius inverses de les matrius A i $A-2\cdot I$.

b.2) No existeix matriu inversa de la matriu $A-I$.

c) Determinar el valor del paràmetre λ per al qual és verifica $A^{-1}=\lambda(A-2\cdot I)$.

Solució:

a)

$$A-I=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\-3&-3&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-3&-3&-3\end{pmatrix}.$$

$$(A-I)^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-3&-3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-3&-3&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$A-2\cdot I=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\-3&-3&-2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&1&2\\-3&-3&-4\end{pmatrix}.$$

$$A(A-2\cdot I)=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\-3&-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\2&1&2\\-3&-3&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=-I.$$

b.1)

Una matriu té inversa si i només si el seu determinant és distint de zero.

$\det(M\cdot N)=\det(M)\cdot\det(N)$.

$A(A-2\cdot I)=-I$.

$\det(A(A-2\cdot I))=\det(-I)$.

$\det(A)\cdot\det(A-2\cdot I)=-1$.

Aleshores, $\det(A)\neq 0$, $\det(A-2\cdot I)\neq 0$. Aleshores, les matrius A i $A-2\cdot I$ tenen inversa.

b.2)

$$A-I=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-3&-3&-3\end{pmatrix}.$$

$\det(A-I)=0$ ja que dues files són linealment dependents. Aleshores, la matriu $A-I$ no té inversa.

c)

$A(A-2\cdot I)=-I$.

$A(-A+2\cdot I)=I$.

Aleshores, la matriu inversa de A és $A^{-1}=-A+2\cdot I=-(A-2\cdot I)$.

Aleshores, $\lambda=-1$.

Problema B1. juny 2010
Donat el sistema d'equacions lineals que depén dels paràmetres a, b i c.

$\begin{cases} 2ax + by + z = 3c \\ 3x - 2by - 2cz = a \\ 5ax - 2y + cz = -4b \end{cases}$, es demana:

a) Justificar raonadament que per als valors dels paràmetres $a = 0, b = -1, c = 2$ el sistema és incompatible.
b) Determinar raonadament els valors dels paràmetres a, b, i c, per als quals es verifica que $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ és solució del sistema.
c) Justificar si la solució $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ del sistema de l'apartat b) és o no, única.

Solució:
a)
Substituïm $a = 0, b = -1, c = 2$ en el sistema d'equacions:

$\begin{cases} -y + z = 6 \\ 3x + 2y - 4z = 0 \\ -2y + 2z = 4 \end{cases}$. Resolem el sistema pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right) \underset{E_3 \equiv 2E_1 - E_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right).$$

El sistema és incompatible, no té solució.
Nota: Notem que la primera i tercera equació, són equacions de dos plànols paral·lels, que no tenen solució, aleshores, el sistema no té solució.
b)
Substituïm en el sistema inicial $(x, y, z) = (1, 2, 3)$:

$\begin{cases} 2a + 2b + 3 = 3c \\ 3 - 4b - 6c = a \\ 5a - 4 + 3c = -4b \end{cases}$, ordenant el sistema en les incògnites a, b, c:

$\begin{cases} 2a + 2b - 3c = -3 \\ -a - 4b - 6c = -3 \\ 5a + 4b + 3c = 4 \end{cases}$. Resoldrem el sistema pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & -6 & -3 \\ 2 & 2 & -3 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) \underset{\substack{E_2 \equiv 2E_1 + E_2 \\ E_3 \equiv 5E_1 + E_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & -6 & -3 \\ 0 & -6 & -15 & -9 \\ 0 & -16 & -27 & -11 \end{array}\right) \underset{E_3 \equiv 8E_2 - 3E_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & -6 & -3 \\ 0 & -6 & -15 & -9 \\ 0 & 0 & -39 & -39 \end{array}\right).$$

Els sistema és compatible determinat:

$\begin{cases} -a - 4b - 6c = -3 \\ \quad -6b - 15c = -9 \\ \quad\quad -39c = -39 \end{cases}$, la solució és $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$. En aquest cas la solució del sistema és $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.
c)

Vegem si al substituir $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$ el sistema inicial és de Cramer:

$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \\ 5x - 2y + z = 4 \end{cases}$. Calculem el determinant de la matriu A de coeficients.

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$, aleshores és un sistema de Cramer per tant té solució única.

Problema 1.1. setembre 2009.

Atesa la matriu $A(\alpha)=\begin{pmatrix}1 & 2 & \alpha-2\\ 4 & 3 & 2\\ \alpha & \alpha & -6\end{pmatrix}$, es demana el següent:

a) Calculeu, en funció de α, el determinat de la matriu $A(\alpha)$, escrivint els càlculs necessaris.
b) Determineu, raonadament, els nombres reals α per als quals el determinant de la matriu inversa de $A(\alpha)$ és igual a $\frac{1}{66}$.

Solució:
a)

Una matriu A té inversa si i només si $|A|\neq 0$ i $A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\mathrm{AdjA})^t$.

$$|A(\alpha)|=\left|\begin{pmatrix}1 & 2 & \alpha-2\\ 4 & 3 & 2\\ \alpha & \alpha & -6\end{pmatrix}\right|=\alpha^2+30.$$

b)
$\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)$.

Siga $(A(\alpha))^{-1}$ la matriu inversa de $A(\alpha)$.

$A(\alpha)\cdot(A(\alpha))^{-1}=I$.

$\det\left(A(\alpha)\cdot(A(\alpha))^{-1}\right)=\det(I)=1$

$\det(A(\alpha))\cdot\det\left((A(\alpha))^{-1}\right)=1$

$\det\left((A(\alpha))^{-1}\right)=\frac{1}{\det(A(\alpha))}=\frac{1}{\alpha^2+30}$. $\det\left((A(\alpha))^{-1}\right)=\frac{1}{66}$

$\frac{1}{\alpha^2+30}=\frac{1}{66}$.

$\alpha^2+30=66$. Resolent l'equació:
$\alpha=-6,\ 6$.

Problema 1.2. setembre 2009.

Atés el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \\ 5x+7y+\alpha z=0 \end{cases}$, es demana el següent:

a) Deduïu, raonadament, per a quins valors de α el sistema sols admet la solució $(x, y, z)=(0, 0, 0)$.

b) Determineu, raonadament, els nombres reals α que el fa indeterminat.

Solució:
El sistema és homogeni ja que té els termes independents zero. Aleshores, el sistema és compatible.
Resolem el sistema pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & \alpha & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{E_2\equiv 2E_1-E_2 \\ E_3\equiv 5E_1-E_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -5-\alpha & 0 \end{array}\right) \underset{E_3\equiv 2E_2-E_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-9 & 0 \end{array}\right)$$

Discussió:
Si $\alpha \neq 9$ el sistema és compatible determinat.
Si $\alpha = 9$ el sistema és compatible indeterminat.

Si $\alpha \neq 9$, per ser el sistema homogeni, la solució única és la trivial $(x, y, z)=(0, 0, 0)$.

Encara que no ho demana resoldrem el sistema.
Si $\alpha = 9$ el sistema inicial és equivalent a:

$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -y-2z=0 \end{cases}$, la solució és $\begin{cases} x=\mu \\ y=-2\mu \\ z=\mu \end{cases}$, $\mu \in R$.

Problema 1.1. juny 2009.

Donades les matrius quadrades $A=\begin{pmatrix}3&6&0\\0&3&2\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}18&48&12\\0&18&12\\0&0&6\end{pmatrix}$ i $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, es demana:

a) Justificar que la matriu A té inversa i obtindre raonadament la matriu inversa A^{-1}. En la resposta s'ha d'incloure tots els passos que porten a l'obtenció de A^{-1}.

b) Calcular, raonadament, el determinant de la matriu $3A^{-1}$. En la resposta s'han d'incloure tots els passos realitzats.

c) Obtindre raonadament els valors x, y, z que verifiquen l'equació $x\cdot I+y\cdot A+z\cdot A^2=B$.

Solució:

a)

Una matriu A té inversa si i només si $|A|\neq 0$ i $A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}A)^t$.

$|A|=\left|\begin{pmatrix}3&6&0\\0&3&2\\0&0&1\end{pmatrix}\right|=9\neq 0$, aleshores, la matriu A té inversa:

$\mathrm{Adj}A=\begin{pmatrix}3&0&0\\-6&3&0\\12&-6&9\end{pmatrix}$.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}A)^t=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3&-6&12\\0&3&-6\\0&0&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{-2}{3}&\frac{4}{3}\\0&\frac{1}{3}&\frac{-2}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

b)

Si M és una matriu quadrada d'ordre 3 $\det(\alpha M)=\alpha^3\det(M)$ ja que de cada fila podem treure factor α.

Per altra banda, $\det(MN)=\det(M)\cdot\det(N)$.

$\det\left(3A^{-1}\right)=3^3\det\left(A^{-1}\right)$.

$$\left|A^{-1}\right|=\left|\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{-2}{3}&\frac{4}{3}\\0&\frac{1}{3}&\frac{-2}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{9}.$$

Aleshores, $\det\left(3A^{-1}\right)=3^3\det\left(A^{-1}\right)=27\frac{1}{9}=3$.

c)

$$A^2=\begin{pmatrix}3&6&0\\0&3&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&6&0\\0&3&2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&36&12\\0&9&8\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$x\cdot I+y\cdot A+z\cdot A^2=x\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}3&6&0\\0&3&2\\0&0&1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}9&36&12\\0&9&8\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3y+9z&6y+36z&12z\\0&x+3y+9z&2y+8z\\0&0&x+y+z\end{pmatrix}$$

$x\cdot I+y\cdot A+z\cdot A^2=B$.

$$\begin{pmatrix}x+3y+9z&6y+36z&12z\\0&x+3y+9z&2y+8z\\0&0&x+y+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18&48&12\\0&18&12\\0&0&6\end{pmatrix}.$$

Igualant els elements de les dues matrius:

$$\begin{cases}x+3y+9z=18\\6y+36z=48\\12z=12\\2y+8z=12\\x+y+z=0\end{cases}$$. Resolent les tres primeres equacions que formen un sistema

triangular i compatible determinat: $\begin{cases}x=3\\y=2\\z=1\end{cases}$.

Aquesta solució també satisfà les altres dues equacions.

Problema 1.2. juny 2009.

Donat el sistema d'equacions lineals $\begin{cases}(\alpha+3)x-4y-2z=4\\ x-2y-(\alpha+2)z=2\\ 2x+(\alpha-3)y-2z=4\end{cases}$, es demana:

a) Justificar que per al valor $\alpha=0$ el sistema és incompatible.
b) Determinar els valors del paràmetre α per als quals el sistema és compatible determinat.
c) Resoldre el sistema per al valor del paràmetre α per al qual el sistema és compatible indeterminat.

Solució:
Estudiem el rang de la matriu A de coeficients i la matriu ampliada A'.

$$A=\begin{pmatrix}\alpha+3 & -4 & -2\\ 1 & -2 & -(\alpha+2)\\ 2 & \alpha-3 & -2\end{pmatrix},\quad A'=\left(\begin{array}{ccc|c}\alpha+3 & -4 & -2 & 4\\ 1 & -2 & -(\alpha+2) & 2\\ 2 & \alpha-3 & -2 & 4\end{array}\right).$$

Calculem el determinant de la matriu de coeficients:

$$|A|=\begin{vmatrix}\alpha+3 & -4 & -2\\ 1 & -2 & -(\alpha+2)\\ 2 & \alpha-3 & -2\end{vmatrix}=\alpha^3+2\alpha^2+\alpha=\alpha(\alpha^2+2\alpha+1).$$

$|A|=0$, si $\alpha(\alpha^2+2\alpha+1)=0$. Resolent l'equació: $\alpha=0,-1$.

$|A|\neq 0$, si $\alpha\neq 0,-1$. En aquest cas el sistema és de Cramer per tant té solució única.

Siga $\alpha=0$, $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & -2\\ 1 & -2 & -2\\ 2 & -3 & -2\end{pmatrix}$, $|A|=0$, aleshores, $\text{rang}A<3$

Considerem el menor d'ordre 2 principal $\begin{vmatrix}3 & -4\\ 1 & -2\end{vmatrix}-2\neq 0$, aleshores, $\text{rang}A\geq 2$.

Per tant, $\text{rang}A=2$.

Considerem el menor d'ordre 3 de la matriu ampliada format per 1ª, 2ª i 4ª columna:

$$\begin{vmatrix}3 & -4 & 4\\ 1 & -2 & 2\\ 2 & -3 & 4\end{vmatrix}=-2\neq 0,\ \text{aleshores, } \text{rang}A'=3.$$

Aleshores, el sistema és incompatible.

Siga $\alpha=-1$, $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & -2\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & -4 & -2\end{pmatrix}$, $|A|=0$, aleshores, $\text{rang}A<3$.

Notem que la segona i tercera fila són dependents de la primera, aleshores, $\text{rang}A=1$.

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -4 & -2 & 4\\ 1 & -2 & -1 & 2\\ 2 & -4 & -2 & 4\end{array}\right).$$

Notem que la segona i tercera fila són dependents de la primera, aleshores, $\text{rang}A'=1$.

$\mathrm{rang}A = \mathrm{rang}A' = 1 < \text{núm.incògnites} = 3$. El sistema és compatible indeterminat.
El sistema es transformaria:
$x - 2y - z = 2$, la solució depén de dos paràmetres:

$$\begin{cases} x = 2 + 2\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}, \ \lambda, \mu \in R.$$

Problema 1.1. setembre 2008.

Atesa la matriu $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ i el vector $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, es demana obtenir raonadament:

a) El vector X tal que $AX=0X$.
b) Tots els vectors X tals que $AX=3X$.
c) Tots els vectors X tals que $AX=2X$.

Solució:
a)
$AX=0X$

$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}x-y\\ 2x+4y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$. Igualant els elements de les dues matrius:

$\begin{cases}x-y=0\\ 2x+4y=0\end{cases}$, resolent el sistema $\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$, aleshores, $X=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$.

b)
$AX=3X$.

$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}x-y\\ 2x+4y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x\\ 3y\end{pmatrix}$. Igualant els elements de les dues matrius:

$\begin{cases}x-y=3x\\ 2x+4y=3y\end{cases}$.

$\begin{cases}-2x-y=0\\ 2x+y=0\end{cases}$, el sistema és compatible indeterminat.

La solució $\begin{cases}x=\alpha\\ y=-2\alpha\end{cases}$, aleshores, $X=\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\end{pmatrix}$, $\alpha\in R$.

c)
$AX=2X$.

$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}x-y\\ 2x+4y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\ 2y\end{pmatrix}$. Igualant els elements de les dues matrius:

$\begin{cases}x-y=2x\\ 2x+4y=2y\end{cases}$.

$\begin{cases}-x-y=0\\ 2x+2y=0\end{cases}$, el sistema és compatible indeterminat.

La solució $\begin{cases}x=\alpha\\ y=-\alpha\end{cases}$, aleshores, $X=\begin{pmatrix}\alpha\\ -\alpha\end{pmatrix}$, $\alpha\in R$.

Problema 1.2. setembre 2008.

Atés el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} x+y+z=\alpha+3 \\ 2x-y+z=\alpha+1 \\ 3x+\alpha y+2z=4 \end{cases}$, es demana:

a) Proveu que és compatible per a tot valor de α.
b) Obteniu raonadament el valor α per al qual el sistema és indeterminat.
c) Resoleu el sistema quan $\alpha=0$, escrivint els càlculs necessaris per a això.

Solució:
Estudiem el rang de la matriu A de coeficients i la matriu ampliada A'.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & \alpha & 2 \end{pmatrix},\ A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \alpha+3 \\ 2 & -1 & 1 & \alpha+1 \\ 3 & \alpha & 2 & 4 \end{array}\right).$$

Calculem el determinant de la matriu de coeficients:

$$|A|=\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & \alpha & 2 \end{pmatrix}\right|=\alpha.$$

$|A|=0$, si $\alpha=0$.

$|A|\neq 0$, si $\alpha\neq 0$. En aquest cas el sistema és de Cramer per tant té solució única.

Siga $\alpha=0$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $|A|=0$, aleshores, $\text{rang}A<3$.

Considerem el menor d'ordre 2 principal $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}-3\neq 0$, aleshores, $\text{rang}A\geq 2$.

Per tant, $\text{rang}A=2$.

Considerem el menor d'ordre 3 de la matriu ampliada format per 1ª, 2ª i 4ª columna:

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right|=0, \text{ aleshores, } \text{rang}A'=2.$$

$\text{rang}A=\text{rang}A'=2<\text{núm.incògnites}=3$. El sistema és compatible indeterminat.
La tercera equació és dependent de les dues primeres.
El sistema seria equivalent a:

$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$. Resoldrem el sistema pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)\underset{E_2\equiv 2E_1-E_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right).$$ El sistema és equivalent:

$\begin{cases} x+y+z=3 \\ \quad 3y+z=5 \end{cases}$, la solució és: $\begin{cases} x=-2+2\mu \\ y=\mu \\ z=5-3\mu \end{cases}$, $\mu\in R$.

Problema 1.1. juny 2008.

Atés el sistema dependent del paràmetre real α $\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{cases}$, es demana el següent:

a) Determineu, raonadament, els valors de α per als quals el sistema és compatible determinat, compatible indeterminat i incompatible.
b) Resoleu el sistema quan és compatible determinat.
c) Obteniu, raonadament, la solució del sistema quan $\alpha = 0$.

Solució:
Discutim el sistema estudiant el rang de la matriu de coeficients i l'ampliada del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix},\ A' = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{array}\right).$$

Calculem el determinant de la matriu de coeficients:

$$|A| = \left|\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}\right| = \alpha^3 - 3\alpha + 2 .$$

$|A| = 0$, si $\alpha^3 - 3\alpha + 2 = 0$. Resolent l'equació per la regla de Ruffini:
$\alpha = 1, 1, -2$.

$|A| \neq 0$, si $\alpha \neq 1, -2$. En aquest cas el sistema és de Cramer per tant té solució única.
Aplicant la regla de Cramer:

$$\begin{cases} x = \dfrac{|A_1|}{|A|} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{\alpha^3 - 3\alpha + 2} = \dfrac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{(\alpha - 1)^2(\alpha + 2)} = \dfrac{1}{\alpha + 2} \\ y = \dfrac{|A_2|}{|A|} = \dfrac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{\alpha^3 - 3\alpha + 2} = \dfrac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{(\alpha - 1)^2(\alpha + 2)} = \dfrac{1}{\alpha + 2} \\ z = \dfrac{|A_3|}{|A|} = \dfrac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\alpha^3 - 3\alpha + 2} = \dfrac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{(\alpha - 1)^2(\alpha + 2)} = \dfrac{1}{\alpha + 2} \end{cases}$$

Si $\alpha = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, Notem que la segona i tercera fila són dependents de la primera, aleshores, $\text{rang} A = 1$.

$A'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{array}\right)$. Notem que la segona i tercera fila són dependents de la primera, aleshores, $\text{rang}A'=1$.

$\text{rang}A=\text{rang}A'=1<\text{núm.incògnites}=3$. El sistema és compatible indeterminat.

Si $\alpha=-2$, $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$. $|A|=0$, aleshores, $\text{rang}A<3$

Calculant el menor principal d'ordre dos de la matriu A:

$\begin{vmatrix}-2&1\\1&-2\end{vmatrix}=3\neq 0$, aleshores, $\text{rang}A\geq 2$

Per tant, $\text{rang}A=2$

Considerem el menor d'ordre 3 de la matriu A' format per la 1ª, 2ª, i 4ª columna:

$\left|\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&1\end{pmatrix}\right|=9\neq 0$, aleshores, $\text{rang}A'=3$

Aleshores, el sistema és incompatible.

c)

Si $\alpha=0$ el sistema és compatible determinat. Substituint $\alpha=0$, en la solució general:

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{\alpha+2}=\dfrac{1}{2}\\ y=\dfrac{1}{\alpha+2}=\dfrac{1}{2}\\ z=\dfrac{1}{\alpha+2}=\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Problema 1.2. juny 2008.

Siguen I i A les matrius quadrades següents: $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}$. Es demana que calculeu, escrivint explícitament les operacions necessàries:

a) Les matrius A^2 i A^3.

b) Els nombres reals α i β per als quals es verifica $(I+A)^3=\alpha I+\beta A$.

Solució:

a)

$$A^2=\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}\begin{pmatrix}17 & 29\\ -10 & -17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-I.$$

$$A^3=A^2A=-I\cdot A=-A=\begin{pmatrix}-17 & -29\\ 10 & 17\end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{aligned}(I+A)^3&=(I+A)(I+A)(I+A)=\left(I^2+IA+AI+A^2\right)(I+A)=\\ &=(I+2A+A^2)(I+A)=\\ &=(I+2A-I)(I+A)=\\ &=(0+2A)(I+A)=\\ &=2A(I+A)=\\ &=2A+2A^2=\\ &=2A+2(-I)=\\ &=-2\cdot I+2\cdot A.\end{aligned}$$

Aleshores, $\alpha=-2,\ \beta=2$.

Problema 1.1. setembre 2007.

Atés el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} 6x+3y+2z=5 \\ 3x+4y+6z=3 \\ x+3y+2z=\alpha \end{cases}$, es demana el següent:

a) Justifiqueu que per a qualsevol valor del paràmetre real α, el sistema té solució única.
b) Trobeu la solució del sistema en funció del paràmetre α.
c) Determineu el valor de α per al qual la solució (x, y, z) del sistema satisfà $x+y+z=1$.

Solució:
a)
Calculem el determinant de la matriu A de coeficients:

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -50 \neq 0 .$$

Aleshores, el sistema és de Cramer, per a qualsevol valor del paràmetre α.
b)
Aplicarem la regla de Cramer per resoldre el sistema:

$$\begin{cases} x = \dfrac{|A_1|}{|A|} = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ \alpha & 3 & 2 \end{vmatrix}}{-50} = \dfrac{-50+10\alpha}{-50} = \dfrac{5-\alpha}{5} \\ y = \dfrac{|A_2|}{|A|} = \dfrac{\begin{vmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & \alpha & 2 \end{vmatrix}}{-50} = \dfrac{30-30\alpha}{-50} = \dfrac{-3+3\alpha}{5} \\ z = \dfrac{|A_3|}{|A|} = \dfrac{\begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & \alpha \end{vmatrix}}{-50} = \dfrac{-20+15\alpha}{-50} = \dfrac{4-3\alpha}{10} \end{cases}$$

c)
Substituïm els valors de la incògnita en l'equació $x+y+z=1$:

$$\frac{5-\alpha}{5} + \frac{-3+3\alpha}{5} + \frac{4-3\alpha}{10} = 1.$$

$\dfrac{8+\alpha}{10} = 1$. Resolent l'equació:

$\alpha = 2$

Problema 1.2. setembre 2007.

Ateses les matrius $A=\begin{pmatrix}6 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ i $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, es demana el següent:

a) Obteniu raonadament tots els valors α per als quals $\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ és l'única solució de l'equació matricial $AX=\alpha X$.

b) Resoleu l'equació matricial $AX=2X$.

Solució:

$AX=\alpha X$.

$AX-\alpha X=O$, $O=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$.

$AX-\alpha I\cdot X=O$, on $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$(A-\alpha I)X=O$.

A fi que el sistema tinga solució única el determinant de la matriu quadrat $A-\alpha I$ de coeficients ha de ser distint de zero.

$A-\alpha I=\begin{pmatrix}6 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix}-\alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-\alpha & 4\\ -1 & 1-\alpha\end{pmatrix}$.

$|A-\alpha I|=\left|\begin{pmatrix}6-\alpha & 4\\ -1 & 1-\alpha\end{pmatrix}\right|=\alpha^2-7\alpha+10$.

$|A-\alpha I|=0$, $\alpha^2-7\alpha+10=0$. Resolent l'equació:

$\alpha=2, 5$.

Aleshores, l'equació matricial té solució única $\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ quan $\alpha\neq 2, 5$.

b)

$AX=2X$.

$\begin{pmatrix}6 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}6x+4y\\ -x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\ 2y\end{pmatrix}$. Igualant els elements de les dues matrius:

$\begin{cases}6x+4y=2x\\ -x+y=2y\end{cases}$.

$\begin{cases}4x+4y=0\\ -x-y=0\end{cases}$. La segona equació és proporcional a la primera:

$x+y=0$, la solució és: $\begin{cases}x=\mu\\ y=-\mu\end{cases}$, $\mu\in R$.

Problema 1.1. juny 2007.

Ateses les matrius $B(x)=\begin{pmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ i $C(y)=\begin{pmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

a) Calculeu el determinant de la matriu $3B(x)$ i obteniu el valor de x per al qual el dit determinant val 162.
b) Demostreu que la matriu $C(y)$ no té inversa per a cap valor real de y.

Solució:
Si M és una matriu quadrada d'ordre 3 $\det(\alpha M)=\alpha^3\det(M)$ ja que de cada fila podem treure factor α.

$$|3\cdot B(x)|=3^3\left|\begin{pmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}\right|=3^3 6\left|\begin{pmatrix} x+2 & 4 & 1 \\ 2x+3 & 3 & 1 \\ 4x+4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right| \underset{\substack{F_2\to F_2-F_1 \\ F_3\to F_3-F_1}}{=} 3^3 6\begin{vmatrix} x+2 & 4 & 1 \\ x+1 & -1 & 0 \\ 3x+2 & -2 & 0 \end{vmatrix}=3^3 6x$$

$|3B(x)|=162$

$3^3 6x=162$. Resolent l'equació:
$x=1$
b)
Una matriu té inversa si i només si el seu determinant és distint de zero.
Calculem $|C(y)|$:

$$|C(y)|=\left|\begin{pmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}\right|=6\left|\begin{pmatrix} 3y+5 & 7 & 2 \\ 2y+3 & 3 & 1 \\ 3y+4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right| \underset{\substack{F_1\to F_1-3F_3 \\ F_2\to F_2-F_3}}{=} 6\left|\begin{pmatrix} -3y-3 & 3 & 0 \\ -y-1 & 1 & 0 \\ 3y+4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right|=6\cdot 0=0$$

Aleshores, $C(y)$ no té inversa per a cap valor real de y.

Problema 1.2. juny 2007.

Atés el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} x+\alpha y+z=9 \\ 3x+5y+z=9 \\ \alpha x+y+z=9 \end{cases}$, es demana el següent:

a) Proveu que és sempre compatible, obtenint els valors de α per als quals és indeterminat.
b) Resoleu el sistema anterior per a $\alpha=7$.

Solució:
Discutim el sistema estudiant el rang de la matriu de coeficients i l'ampliada del sistema:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \\ \alpha & 1 & 1 & 9 \end{array}\right).$$

Notem que la quarta columna de la matriu ampliada A' és linealment dependent de la tercera columna de la matriu A. Aleshores, $\text{rang}A=\text{rang}A'$.

Aplicant el teorema de Rouché-Frobenius el sistema sempre és compatible.
Vegem quan és determinat i indeterminat.
Calculem el determinant de la matriu de coeficients:

$$|A|=\left|\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}\right|=\alpha^2-8\alpha+7.$$

$|A|=0$, si $\alpha^2-8\alpha+7=0$. Resolent l'equació:

$\alpha=1, 7$.

$|A|\neq 0$, si $\alpha\neq 1, 7$. En aquest cas el sistema és de Cramer per tant té solució única.

Si $\alpha=1, 7$ el sistema és compatible indeterminat.

b)

Si $\alpha=7$. $\begin{cases} x+7y+z=9 \\ 3x+5y+z=9 \\ 7x+y+z=9 \end{cases}$. $|A|=0$, aleshores, $\text{rang}A<3$

El menor d'ordre 2 principal és:

$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=-16\neq 0$, aleshores, $\text{rang}A\geq 2$.

Aleshores, $\text{rang}A=2$.

La tercera equació és dependent de les dues primers. El sistema és equivalent:

$\begin{cases} x+7y+z=9 \\ 3x+5y+z=9 \end{cases}$. El resoldrem pel mètode de Gauss:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \end{array}\right) \underset{E_2\equiv 3E_1-E_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 1 & 9 \\ 0 & 16 & 2 & 18 \end{array}\right)$. El sistema és equivalent:

$\begin{cases} x+7y+z=9 \\ \quad 8y+z=9 \end{cases}$, la solució és: $\begin{cases} x=\mu \\ y=\mu \\ z=9-8\mu \end{cases}$, $\mu\in R$.

Problema A.1. setembre 2006.
Donat el sistema d'equacions amb un paràmetre real λ i incògnites x, y, z,

$$\begin{cases}(\lambda+2)x-y+z=0\\ 3x+(\lambda+6)y-3z=0\\ 5x+5y+(\lambda-2)z=0\end{cases}$$, es demana:

a) Calculeu per a quins valors de λ el sistema només admet la solució $(x, y, z)=(0,0,0)$.

b) Per a cada valor de λ que fa indeterminat el sistema, obteniu totes les seues solucions.

c) Expliqueu la posició relativa dels tres plans definits per cadascun de les equacions del sistema quan $\lambda=-3$.

Solució:

a)

El sistema és homogeni (té tots els termes independents zero), aleshores és compatible (sempre tindrà la solució $(x, y, z)=(0,0,0)$.

El sistema serà compatible determinat si és un sistema de Cramer és a dir si el determinant de la matriu A dels coeficients és distinta de zero. Calculem-lo:

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1 & 1\\ 3 & \lambda+6 & -3\\ 5 & 5 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^3+6\lambda^2+9\lambda=\lambda(\lambda+3)^2.$$

$|A|=0$, si $\lambda(\lambda+3)^2=0$. Resolent l'equació:

$\lambda=0,-3$.

El sistema és compatible determinat si $\lambda\neq 0,-3$.

b)

Siga $\lambda=0$, $|A|=0$, $\text{rang}A<3$.

$$\begin{cases}2x-y+z=0\\ 3x+6y-3z=0\\ 5x+5y-2z=0\end{cases}.$$

El menor principal d'ordre 2 $\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 6\end{vmatrix}=15\neq 0$, aleshores, $\text{rang}A\geq 2$.

Aleshores, $\text{rang}A=\text{rang}A'=2<\text{núm.incognites}=3$. El sistema és compatible indeterminat.

La tercera equació depén de les dues primeres (la podem eliminar del sistema. El sistema és:

$$\begin{cases}2x-y+z=0\\ 3x+6y-3z=0\end{cases}$$. El resoldrem pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 1 & 0\\ 3 & 6 & -3 & 0\end{array}\right)\underset{E_2\equiv 3E_1-2E_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -15 & -9 & 0\end{array}\right)$$. El sistema és equivalent:

$$\begin{cases}2x-y+z=0\\ \quad 5y-3z=0\end{cases}$$. La solució és: $$\begin{cases}x=\dfrac{-1}{5}\mu\\ y=\dfrac{3}{5}\mu\\ z=\mu\end{cases},\ \mu\in R.$$

Siga $\lambda = -3$, $|A| = 0$, $\text{rang}A < 3$.

$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 3x + 3y - 3z = 0 \\ 5x + 5y - 5)z = 0 \end{cases}$. Notem que la segona i tercera equació són proporcionals a la primera, aleshores les podem eliminar. El sistema és transformaria:

$-x - y + z = 0$.

La solució és, $\begin{cases} x = \alpha - \beta \\ y = \beta \\ z = \alpha \end{cases}$, $\alpha, \beta \in R$.

c)

Si $\lambda = -3$.

$\text{rang}A = \text{rang}A' = 1 < \text{núm.incognites} = 3$.

Els tres plànols són coincidents (tenen la mateixa equació).

Problema B.1. setembre 2006.

A és una matriu 3×3 tal que $A^2=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ i $A^3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & -1 & 0\\ 2 & 2 & -3\end{pmatrix}$. Es demana:

a) Calculeu el determinant de la matriu A^3 i la inversa de A^3.

b) Calculeu la matriu $X=(x, y, z)$ que és solució de l'equació matricial $XA^3=BA^2$, en que B és la matriu fila $B=(1, 2, 3)$.

c) Calculeu la matriu inversa de A.

Solució:

a)

$\left|A^3\right|=\left|\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & -1 & 0\\ 2 & 2 & -3\end{pmatrix}\right|=-1\neq 0$. La matriu A^3 té inversa, $\left(A^3\right)^{-1}=\frac{1}{\left|A^3\right|}\left(\text{Adj}A^3\right)^t$.

$$\text{Adj}(A^3)=\begin{pmatrix}3 & -6 & -2\\ 4 & -7 & -4\\ 2 & -4 & -1\end{pmatrix}.$$

$$\left(A^3\right)^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ -6 & -7 & -4\\ -2 & -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -4 & -2\\ 6 & 7 & 4\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

b)

$XA^3=BA^2$. Multiplicant a la dreta per $\left(A^3\right)^{-1}$:

$XA^3\left(A^3\right)^{-1}=BA^2\left(A^3\right)^{-1}$.

$X=BA^2\left(A^3\right)^{-1}$.

$$X=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & -4 & -2\\ 6 & 7 & 4\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & -4 & -2\\ 6 & 7 & 4\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 6 & 2\end{pmatrix}$$

c)

Si $\left|A^3\right|=-1\neq 0$ aleshores, $|A|\neq 0$, per tant, A té inversa.

$A^3\left(A^3\right)^{-1}=I$

$A\cdot A^2\left(A^3\right)^{-1}=I$, aleshores la matriu inversa de A és:

$A^{-1}=A^2\left(A^3\right)^{-1}$.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & -4 & -2\\ 6 & 7 & 4\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Problema A1. juny 2006.

Donat el sistema d'equacions amb incògnites x, y, z, $\begin{cases} x+2y-3z=\alpha \\ 2x+6y-11z=2 \\ x-2y+7z=1 \end{cases}$ es demana:

a) Determineu raonadament el valor de α per al qual el sistema és compatible.
b) Per a aquest valor obtingut en a) de α, calculeu el conjunt de solucions del sistema.
c) Expliqueu la posició relativa dels tres plans definits per cadascuna de les tres equacions del sistema, en funció dels valors de α.

Solució:
a)
Estudiarem el rang de la matriu A de coeficients i la matriu ampliada A' pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 2 & 6 & -11 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2\to 2F_1-F_2 \\ F_3\to F_1-F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 0 & -2 & 5 & 2\alpha-2 \\ 0 & 4 & -10 & \alpha-1 \end{array}\right) \underset{F_3\to 2F_2+F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 0 & -2 & 5 & 2\alpha-2 \\ 0 & 0 & 0 & 5\alpha-5 \end{array}\right).$$

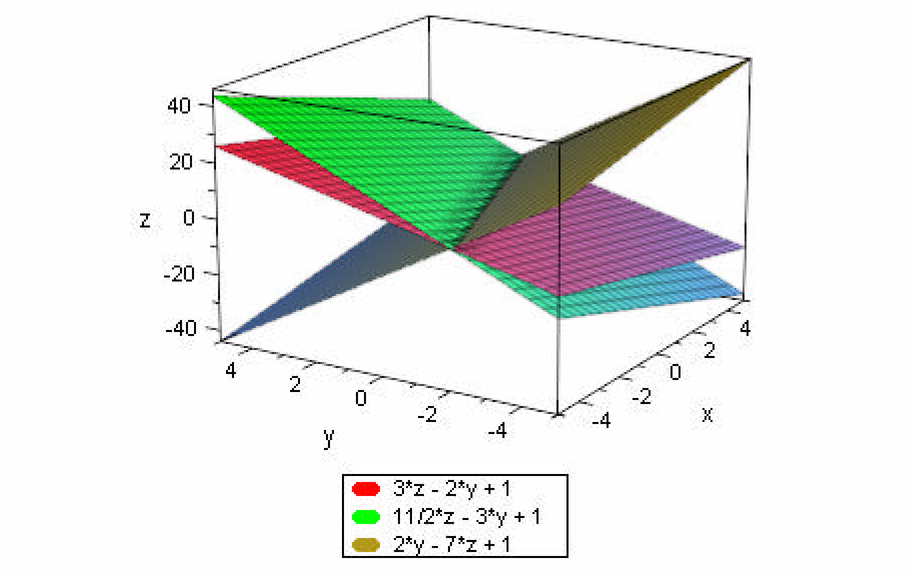
α	rang A	rangA'	Discussió
$\alpha=1$	2	2	Sistema compatible indeterminat
$\alpha\neq 1$	2	3	Sistema incompatible

Siga $\alpha=1$, el sistema inicial és equivalent al sistema:

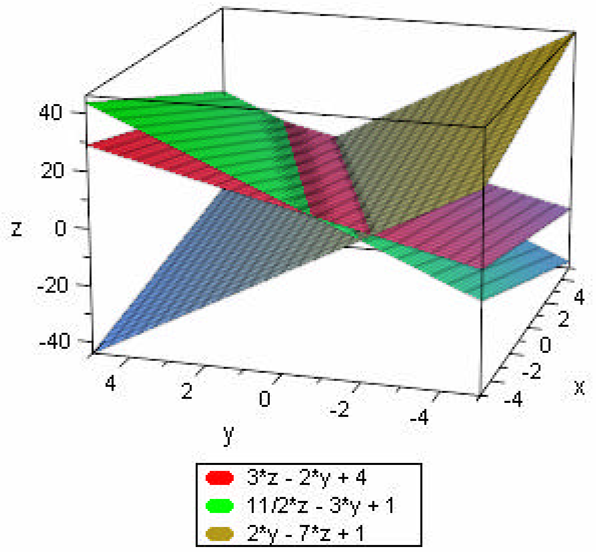
$$\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ \quad -2y+5z=0 \end{cases}, \text{ la solució és, } \begin{cases} x=1-2\mu \\ y=\dfrac{5}{2}\mu \\ z=\mu \end{cases}, \ \mu\in R.$$

c)
Dos a dos els plànols no compleixen la condició de paral·lelisme ni coincidència. Aleshores dos a dos són secants.

Siga $\alpha=1$, el sistema inicial és compatible indeterminat, la solució depén d'un paràmetre aleshores els tres plànols s'intersecten en una recta.



Siga $\alpha \neq 1$ el sistema inicial és incompatible, els tres plànols no s'intersecten i dos a dos s'intersecten en una recta.



Problema B.1. juny 2006.

Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}2&2&1\\-1&-1&-1\\2&4&3\end{pmatrix}$ i $T=\begin{pmatrix}2&4&1\\-1&-3&-1\\1&2&1\end{pmatrix}$ es demana:

a) Proveu que la matriu T té inversa, T^{-1}, i calculeu la dita matriu inversa T^{-1}.
b) Donada l'equació amb matriu incògnita B, $A=T^{-1}BT$, calculeu el determinant de B.
c) Obteniu els elements de la matriu B considerada en l'apartat b).

Solució:
a)
Una matriu té inversa si i només si el seu determinant és distint de zero i a més a més,
$T^{-1}=\frac{1}{|T|}(\text{Adj}T)^t$.
Calculem el determinant de la matriu T:

$$|T|=\left|\begin{pmatrix}2&4&1\\-1&-3&-1\\1&2&1\end{pmatrix}\right|=-1\neq 0$$

$$\text{Adj}T=\begin{pmatrix}-1&0&1\\-2&1&0\\-1&1&-2\end{pmatrix}.$$

$$T^{-1}=\frac{1}{|T|}(\text{Adj}T)^t=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\0&1&1\\1&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&-1\\-1&0&2\end{pmatrix}$$

b)
$\det(MN)=\det(M)\cdot\det(N)$
$\det(T^{-1}T)=\det(I)=1.$
$\det(T^{-1})\cdot\det(T)=\det(I)=1$

$A=T^{-1}BT$.
$\det(A)=\det\left(T^{-1}BT\right)$
$\det(A)=\det\left(T^{-1}\right)\cdot\det(B)\cdot\det(T)$.

$$\det(B)=\det(A)=\begin{vmatrix}2&2&1\\-1&-1&-1\\2&4&3\end{vmatrix}=2.$$

c)
$A=T^{-1}BT$. Multiplicant per T a l'esquerra i per T^{-1} a la dreta:
$TAT^{-1}=TT^{-1}BTT^{-1}$.

$$B=TAT^{-1}=\begin{pmatrix}2&4&1\\-1&-3&-1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&1\\-1&-1&-1\\2&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&-1\\-1&0&2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&4&1\\-1&-3&-1\\2&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&-1\\-1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Problema A.1. setembre 2005.

Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7\\2\\-2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$ i $E=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$, calculeu raonadament la matriu $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ que satisfà l'equació $(AB^t+C)X=(A^tD)E$, on M^t significa la matriu transposada de la matriu M.

Solució:

Calculem AB^t+C:

$$AB^t+C=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&2&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&2&-2\\14&4&-4\\21&6&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&2&-2\\14&5&-4\\21&6&-5\end{pmatrix}.$$

Calculem $(A^tD)E$

$$(A^tD)E=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}=10\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\50\\30\end{pmatrix}.$$

L'equació a resoldre és:

$(AB^t+C)X=(A^tD)E$

$\begin{pmatrix}7&2&-2\\14&5&-4\\21&6&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\50\\30\end{pmatrix}$. El resoldrem pel mètode de Gauss:

$\left(\begin{array}{ccc|c}7&2&-2&20\\14&5&-4&50\\21&6&-5&30\end{array}\right)\underset{\substack{E_2\to 2E_1-E_2\\E_3\to 3E_1-E_3}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}7&2&-2&20\\0&-1&0&-10\\0&0&-1&30\end{array}\right)$. El sistema és compatible determinat i equivalent a $\begin{cases}7x+2y-2z=20\\-y=-10\\-z=30\end{cases}$, la solució és: $\begin{cases}x=\dfrac{-60}{7}\\y=10\\z=-30\end{cases}$.

Problema B.1. setembre 2005.

En el mercat podem trobar tres aliments preparats per a gats que es fabriquen posant, per quilo, les següents quantitats de carn, peix i verdura:

- Aliment *Migato*: 600 g de carn, 300g de peix i 100g de verdura.
- Aliment *Catomeal*: 300 g de carn, 400g de peix i 300g de verdura.
- Aliment *Comecat*: 200 g de carn, 600g de peix i 200g de verdura.

Si volem oferir al nostre gat 470 g de carn, 370 g de peix i 160 g de verdura per quilo d'aliment, quin percentatge de cadascun dels compostos anteriors hem de mesclar per obtenir la proporció desitjada?.

Solució:

x = el percentatge d'aliment *Migato*.
y = el percentatge d'aliment *Catomeal*.
z = el percentatge d'aliment *Comecat*.

Si volem en la mescla 470 g de carn:

$$\frac{x}{100}600+\frac{y}{100}300+\frac{z}{100}200=470 .$$

Si volem en la mescla 370 g de peix:

$$\frac{x}{100}300+\frac{y}{100}400+\frac{z}{100}600=370 .$$

Si volem en la mescla 160 g de verdura:

$$\frac{x}{100}100+\frac{y}{100}300+\frac{z}{100}200=160 .$$

Considerem el sistema format per les tres equacions anteriors:

$$\begin{cases} 6x+3y+2z=470 \\ 3x+4y+6z=370 \\ x+3y+2z=160 \end{cases}.$$

Resolent el sistema: $\begin{cases} x=62 \\ y=22 \\ z=16 \end{cases}.$

Em de mesclar el 62% d'aliment *Migato*, el 22% d'aliment *Catomeal*, i el 16% d'aliment *Comecat*.

Problema A.1. juny 2005.

Calculeu $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$, que satisfan les equacions següents:

$\begin{cases} 2AX-3AY=B \\ AX-AY=C \end{cases}$, on $X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}$.

Solució:

$\begin{cases} 2AX-3AY=B \\ AX-AY=C \end{cases}$.

Notem que $|A|=1\neq 0$, aleshores, la matriu A té inversa.

$\begin{cases} 2AX-3AY=B \\ AX-AY=C \end{cases}$. Multipliquem les dues equacions per A^{-1}:

$\begin{cases} 2A^{-1}AX-3A^{-1}AY=A^{-1}B \\ A^{-1}AX-A^{-1}AY=A^{-1}C \end{cases}$.

$\begin{cases} 2X-3Y=A^{-1}B \\ X-Y=A^{-1}C \end{cases}$. Resolent el sistema pel mètode de reducció:

$\begin{cases} Y=2A^{-1}C-A^{-1}B \\ X=3A^{-1}C-A^{-1}B \end{cases}$

$\begin{cases} X=A^{-1}(3C-B) \\ Y=A^{-1}(2C-B) \end{cases}$.

Calculem la matriu inversa de la matriu A pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2\to F_1+2F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{F_1\to F_1+5F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{F_1\to \frac{1}{2}F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Aleshores, $A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A^{-1}(3C-B)=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\left[3\begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -33 & -90 \\ 19 & 53 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}(2C-B)=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\left[2\begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -16 & -60 \\ 9 & 35 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, $\begin{cases} X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix} \\ Y=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \end{cases}$.

Problema B.1. juny 2005.

El sistema d'equacions lineals $\begin{cases} x+\alpha y+\alpha^2 z=1 \\ x+\alpha y+\alpha z=\alpha \\ x+\alpha^2 y+\alpha^2 z=\alpha^2 \end{cases}$ depén del paràmetre real α.

Discutiu per a quins valors de α és incompatible, compatible determinat i compatible indeterminat, i resoleu-lo en els casos compatibles.

Solució:
Calculem el determinant de la matriu A de coeficients:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{vmatrix}=\alpha^4-2a\alpha^3+\alpha^2=\alpha^2\left(\alpha^2-2\alpha+1\right).$$

$|A|=0$, si $\alpha^2\left(\alpha^2-2\alpha+1\right)=0$. $\alpha^2(\alpha-1)^2=0$. Resolent l'equació: $\alpha=0, 1$.

a)
El sistema és de Cramer (compatible determinat) si $\alpha\neq 0, 1$.
Resolent el sistema amb la regla de Cramer:

$$\begin{cases} x=\dfrac{|A_1|}{|A|}=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{vmatrix}}{\alpha^2(\alpha-1)^2}=\dfrac{0}{\alpha^2(\alpha-1)^2}=0 \\ y=\dfrac{|A_2|}{|A|}=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha^2 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{vmatrix}}{\alpha^2(\alpha-1)^2}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)^2(1+\alpha)}{\alpha^2(\alpha-1)^2}=\dfrac{1+\alpha}{\alpha} \\ z=\dfrac{|A_3|}{|A|}=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{vmatrix}}{\alpha^2(\alpha-1)^2}=\dfrac{-\alpha(\alpha-1)^2}{\alpha^2(\alpha-1)^2}=-\dfrac{1}{\alpha} \end{cases}$$

b)
Siga $\alpha=0$, el sistema quedaria:

$\begin{cases} x=1 \\ x=0 \\ x=0 \end{cases}$. El sistema és incompatible.

c)
Siga $\alpha=1$, el sistema quedaria:

$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$, la segona i tercera equació són iguals a la primera.

El sistema es transformaria en l'equació $x+y+z=1$ que és compatible indeterminat les solucions són:

$$\begin{cases} x = 1-\lambda-\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in R.$$

Problema A.1. setembre 2004.

Calculeu tots els valors reals x, y, z, t per al quals es verifica $AX = XA$ on $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ i $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Solució:

$AX = XA$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+4z & 3y+4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z+3t & 2z+4t \end{pmatrix}$. Igualant els elements de les dues matrius:

$$\begin{cases} x+2z = x+3y \\ y+2t = 2x+4y \\ 3x+4z = z+3t \\ 3y+4t = 2z+4t \end{cases}.$$

$\begin{cases} 3y-2z=0 \\ 2x+3y-2t=0 \\ 3x+3z-3t=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases}$. Resoldrem el sistema pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{E_3 \to 2E_1 - E_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{E_3 \to E_2 + E_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

El sistema és compatible determinat, depén de dos paràmetres. El sistema equivalent és:

$$\begin{cases} x+z-t=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases}.$$

La solució és:

$$\begin{cases} x = \alpha - \beta \\ y = \frac{2}{3}\alpha \\ z = \beta \\ t = \alpha \end{cases}, \quad \alpha, \beta \in R.$$

Problema A.1. setembre 2004.

Tenim les matrius $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Justifiqueu que existeix A^{-1}, inversa de A, i calculeu el determinant A^{-1}
b) Calculeu la matriu $B=A(A+4\cdot I)$

c) Determineu els nombres reals x, y, z, t que compleixen $A^{-1}=xA+y\cdot I$,

$A^2=zA+t\cdot I$.

Solució:
a)
Una matriu té inversa si i només si el seu determinant és distint de zero.

$|A|=\left|\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\right|=-8$. Aleshores, A té inversa.

$\det(MN)=\det(M)\cdot\det(N)$.

$AA^{-1}=I$.

$\det\left(AA^{-1}\right)=\det(I)=1$.

$\det(A)\cdot\det\left(A^{-1}\right)=1$.

$-8\cdot\det\left(A^{-1}\right)=1$, aleshores, $\det\left(A^{-1}\right)=-\dfrac{1}{8}$.

b)

$$A(A+4\cdot I)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 6\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 6\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}=-4\cdot I$$

c)

$A(A+4\cdot I)=-4\cdot I$.

$A\left(\dfrac{-1}{4}\right)(A+4\cdot I)=I$.

Aleshores, la matriu inversa de A és $A^{-1}=\dfrac{-1}{4}(A+4\cdot I)=\dfrac{-1}{4}A-1\cdot I$.

Aleshores, $x=\dfrac{-1}{4}$, $y=-1$.

$A(A+4\cdot I)=-4\cdot I$.

$A^2+4AI=-4\cdot I$.

$A^2=-4A-4\cdot I$.

Aleshores, $z=-4, t=-4$.

Problema B.1. setembre 2004.

Donat el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} x-y+z=\lambda \\ \lambda x+2y-z=3\lambda \\ 2x+\lambda y-2z=6 \end{cases}$, amb λ paràmetre real:

a) Determineu raonadament per a quins valors de λ és compatible determinat, compatible indeterminat i incompatible.
b) Calculeu el conjunt de les solucions del sistema per al cas compatible determinat.
c) Calculeu el conjunt de solucions del sistema per al cas compatible indeterminat.

Solució
Estudiem el determinant de la matriu A de coeficients:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -2 \end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-6.$$

$|A|=0$, si $\lambda^2-\lambda-6=0$. $(x+2)(x-3)=0$. Resolent l'equació: $\lambda=-2, 3$.

Si $\lambda\neq-2, 3$ és un sistema de Cramer, compatible determinat.

Resoldrem el sistema amb la regla de Cramer:

$$\begin{cases} x=\dfrac{|A_1|}{|A|}=\dfrac{\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 3\lambda & 2 & -1 \\ 6 & \lambda & -2 \end{vmatrix}}{(\lambda+2)(\lambda-3)}=\dfrac{4\lambda^2-10\lambda-6}{(\lambda+2)(\lambda-3)}=\dfrac{4\lambda+2}{\lambda+2} \\ y=\dfrac{|A_2|}{|A|}=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 3\lambda & -1 \\ 2 & 6 & -2 \end{vmatrix}}{(\lambda+2)(\lambda-3)}=\dfrac{2\lambda^2-8\lambda-6}{(\lambda+2)(\lambda-3)}=\dfrac{2\lambda-2}{\lambda+2} \\ z=\dfrac{|A_3|}{|A|}=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ \lambda & 2 & 3\lambda \\ 2 & \lambda & 6 \end{vmatrix}}{(\lambda+2)(\lambda-3)}=\dfrac{\lambda^3-3\lambda^2-4\lambda+12}{(\lambda+2)(\lambda-3)}=\lambda-2 \end{cases}$$

Si $\lambda=-2$ el sistema quedaria:

$\begin{cases} x-y+z=-2 \\ -2x+2y-z=-6 \\ 2x-2y-2z=6 \end{cases}$, la matriu ampliada $A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -6 \\ 2 & -2 & -2 & 6 \end{array}\right)$

$|A|=0$, $\text{rang}A<3$.

Té d'ordre 2 distint de zero, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1\neq 0$, aleshores, $\text{rang}A\geq 2$

Aleshores, $\text{rang}A=2$

Considerem el determinant format per la segona, tercera i quarta columna de la matriu A':

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -6 \\ -2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 30 \neq 0$, aleshores, $\text{rang}A' = 3$

Per tant, si $\lambda = -2$ el sistema és incompatible.

Si $\lambda = 3$ el sistema quedaria:

$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - z = 9 \\ 2x + 3y - 2z = 6 \end{cases}$, la matriu ampliada $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \end{array}\right)$.

$|A| = 0$, $\text{rang}A < 3$.

Té d'ordre 2 distint de zero, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, aleshores, $\text{rang}A \geq 2$.

Aleshores, $\text{rang}A = 2$

Considerem el determinant format per la segona, tercera i quarta columna de la matriu A':

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 9 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0$, aleshores, $\text{rang}A' = 2$.

El sistema és compatible indeterminat. La tercera equació depén de les dues primeres.
El sistema seria equivalent a:

$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - z = 9 \end{cases}$. El resolem pel mètode de Gauss:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \underset{E_2 \equiv 3E_1 - E_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 4 & 3 \end{array}\right)$. El sistema és equivalent:

$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ -5y + 4z = 0 \end{cases}$. La solució és:

$$\begin{cases} x = \dfrac{15 - \alpha}{5} \\ y = \dfrac{4}{5}\alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \quad \alpha \in R.$$

Problema A.1. juny 2004.
Determineu el valor real x per al qual es compleix la propietat següent:

El determinat de la matriu 2B és 160, on $B = \begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{pmatrix}$.

Solució:

$$2|B| = \left|\begin{pmatrix} 2\cdot x & 2\cdot 3 & 2\cdot 1 \\ 2(x+1) & 2\cdot 4 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot x & 2(2-x^2) & 2\cdot 1 \end{pmatrix}\right| = 8\left|\begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2) & 1 \end{pmatrix}\right| = 8\left(x^3 - x^2 + x - 1\right)$$

$2|B| = 160$.

$8\left(x^3 - x^2 + x - 1\right) = 160$

$x^3 - x^2 + x - 1 = 20$

$x^3 - x^2 + x - 21 = 0$. Factoritzant amb la regla de Ruffini:

$(x-3)(x^2 + 2x + 7) = 0$

L'única solució és $x = 3$.

Problema B.1. juny 2004.

Tenim les matrius $A=\begin{pmatrix}0 & m & 3\\ 1 & 0 & -1\\ 5 & 1 & -(m+1)\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Per a quins valors reals de m és A inversible? Calculeu la matriu A^{-1}.
b) En la matriu anterior A amb $m=0$, obteniu la matriu real quadrada X d'ordre 3 que satisfà la igualtat $B-AX=AB$.

Solució:
a)
Una matriu té inversa si i només si el seu determinant és distint de zero i a més a més,

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}A)^t.$$

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & m & 3\\ 1 & 0 & -1\\ 5 & 1 & -(m+1)\end{vmatrix}=m^2-4m+3.$$

$|A|=0$, si $m^2-4m+3=0$. Resolent l'equació:
$m=1, 3$.
La matriu A té inversa si i només si $m\neq 1, 3$.

$$\mathrm{Adj}A=\begin{pmatrix}1 & m-4 & 1\\ m^2-m+3 & -15 & 5m\\ -m & 3 & -m\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\mathrm{Adj}A)^t=\frac{1}{m^2-4m+3}\begin{pmatrix}1 & m^2+m+3 & -m\\ m-4 & -15 & 3\\ 1 & 5m & -m\end{pmatrix}.$$

b)
Si $m=0$, $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ 5 & 1 & -1\end{pmatrix}$. $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ -4 & -15 & 3\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

$B-AX=AB$
$AX=B-AB=(I-A)B$. Multiplicant per A^{-1} a l'esquerra:
$A^{-1}AX=A^{-1}(I-A)B$.
$IX=A^{-1}(I-A)B$.
$X=A^{-1}(I-A)B$.

$$X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ -4 & -15 & 3\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ -1 & 1 & 1\\ -5 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ -4 & -15 & 3\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & -3\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & -5 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ -18 & -4 & 3\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{-2}{3} & 0\\ -6 & \frac{-4}{3} & 1\\ 0 & \frac{1}{3} & -1\end{pmatrix}.$$