Problema A.2. Setembre 2012

En l'espai es té la recta r i el pla Π d'equacions $r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ i $\Pi \equiv x+mz = 0$, on m és un paràmetre real. Obteniu raonadament:

a) Un vector director de la recta r.
b) El valor de m per al qual la recta r i el pla Π són perpendiculars.
c) El valor de m per al qual la recta r i el pla Π són paral·lels.
d) La distància entre r i Π quan es dóna a m el valor obtingut en l'apartat c).

Solució:
a)
Resolent el sistema format per les equacions de la recta r, les equacions paramètriques de la recta són:

$r \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{2}+\lambda \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \lambda \end{cases}$. Un punt de la recta és $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ i el vector director és $v = (1, 0, 1)$.

b)
El vector característic o normal del plànol és $a = (1, 0, m)$.
Una recta i un plànol són perpendiculars si els vector director de la recta i el característic del plànol són linealment dependents. És a dir, si les seues components són proporcionals:

$\frac{1}{1} = \frac{m}{1}$. Resolent l'equació: $m = 1$.
El plànol que ho compleix és $\Pi_1 \equiv x + z = 0$.
c)
Una recta i un plànol són paral·lels si els vector director de la recta i el característic del plànol són ortogonals i qualsevol punt de la recta no és del plànol.
Dos vectors són ortogonals si el seu producte escalar és zero.
$(1, 0, 1)(1, 0, m) = 0$.
$1+0+m=0$. Resolent l'equació: $m = -1$.
El plànol que ho compleix és $\Pi_{-1} \equiv x - z = 0$.

Notem que el punt de la recta $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ no pertany al plànol $\Pi_{-1} \equiv x - z = 0$ ja que no satisfà la seua equació, $\frac{1}{2} - 0 \neq 0$.

Aleshores la recta i el plànol són paral·lels quan $m = -1$.
d)
En el apartat c) si $m = -1$, la recta i el plànol són paral·lels.
La distància entre la recta i el plànol és igual a la distància del punt $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ al plànol $\Pi_{-1} \equiv x - z = 0$:

$$d(r, \Pi_{-1}) = d(P, \Pi_{-1}) = \left| \frac{\frac{1}{2}+0-0}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Problema B.2. Setembre 2012

En l'espai es donen els plans π , σ i τ d'equacions:
$\pi \equiv 2x - y + z = 3$, $\sigma \equiv x - y + z = 2$, $\tau \equiv 3x - y - az = b$, essent a i b paràmetres reals, i la recta r intersecció dels plans π , σ. Obteniu raonadament:

a) Un punt, el vector director de i les equacions de la recta r.

b) L'equació del pla que conté la recta r i passa pel punt $(2, 1, 3)$.

c) Els valors de a i b perquè el pla τ continga la recta r, intersecció els plans π i σ.

Solució:

a)

L'equació de la recta és el sistema format per les dues equacions dels plànols.

$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$. Resolent el sistema obtenim l'equació paramètrica de la recta:

$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$. Un punt de la recta r és $P(1, 0, 1)$ i el vector director, $v = (0, 1, 1)$.

b)

Siga $A(2, 1, 3)$.

Notem que A no pertany a la recta r ja que no satisfà la primera de les dues equacions de la recta:

$\begin{cases} 2 \cdot 2 - 1 + 3 \neq 3 \\ \end{cases}$.

El plànol que cerquem és el plànol que passa pel punt P i té vectors directors v, $\vec{PA}$.
$\vec{PA} = (1, 1, 2)$. El plànol que cerquem té equació:

$$\Omega \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$. Simplificant, $\Omega \equiv x + y - z = 0$.

c)

Per a que una recta estiga continguda en el plànol dos punts distints de la recta han pertànyer al plànol.

A partir de l'equació paramètrica de la recta r siguen $P(1, 0, 1)$, $Q(1, 1, 2)$ dos punts de la recta r.

Substituint les coordenades de P i Q en el plànol $\tau \equiv 3x - y - az = b$.

$\begin{cases} 3 \cdot 1 - 0 - a \cdot 1 = b \\ 3 \cdot 1 - 1 - a \cdot 2 = b \end{cases}$. Simplificant:

$\begin{cases} a + b = 3 \\ 2a + b = 2 \end{cases}$. Resolent el sistema $\begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases}$.

Problema A.2. Juny 2012

Es donen les rectes $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1+2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 2-\alpha \end{cases}$ i $r_2 \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = 1+\beta \\ z = -1-2\beta \end{cases}$, essent α i β paràmetres reals.

Calculeu raonadament:

a) Les coordenades del punt de tall de r_1 i r_2.

b) L'equació del pla que conté aquestes dues rectes.

c) La distància del punt $(0, 0, 1)$ a la recta r_2.

Solució:

a)

Determinem la intersecció (punt de tall) de les rectes r_1 i r_2.

$\begin{cases} 1+2\alpha = -1 \\ \alpha = 1+\beta \\ 2-\alpha = -1-2\beta \end{cases}$, el sistema és compatible determinat i la solució és: $\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -2 \end{cases}$.

Substituint el valor del paràmetre α en l'equació de la recta r_1:

$\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$, el punt d'intersecció és $P(-1, -1, 3)$.

b)

El vector director de la recta r_1 és: $v = (2, 1, -1)$.

El vector director de la recta r_2 és: $w = (0, 1, -2)$.

Els vectors v i w són linealment independents, perquè les components no són proporcionals.

El plànol que conté les rectes r_1 i r_2 és el plànol que passa pel punt $P(-1, -1, 3)$ i té direcció $v = (2, 1, -1)$, $w = (0, 1, -2)$.

La seua equació és:

$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z-3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$. En forma general, $\Pi \equiv -x + 4y + 2z - 3 = 0$.

c)

Un punt de la recta r_2 és $A(-1, 1, -1)$. Siga $Q(0, 0, 1)$.

La distància de Q a la recta r_2 és:

$$d(Q, r_2) = \frac{\left\| w \times \overrightarrow{AQ} \right\|}{\|w\|}.$$

$\overrightarrow{AQ} = (1, -1, 2)$. $w \times \overrightarrow{AQ} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (0, -2, -1)$.

$\left\| w \times \overrightarrow{AQ} \right\| = \|(0, -2, -1)\| = \sqrt{5}$, $\|w\| = \|(0, 1, -2)\| = \sqrt{5}$.

Aleshores: $d(Q, r_2) = \dfrac{\left\| w \times \overrightarrow{AQ} \right\|}{\|w\|} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$.

Problema B.2. Juny 2012

Es dóna la recta r d'equació $r \equiv \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+5y-z=0 \end{cases}$ i el pla Π d'equació $\Pi \equiv 2x+y+nz=p$, on n i p són paràmetres reals.

Obteniu raonadament:

a) Tots els valors de n per als quals la intersecció de la recta r i el pla Π és un punt.

b) El valor de n i el valor de p per als quals la recta r està continguda en el pla Π.

c) El valor de n i tots els valors de p per al quals la recta r no talla el pla Π.

Solució:

Per estudiar la posició relativa de r i Π estudiarem el sistema d'equacions format per la recta i el plànol.

$$\begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+5y-z=0 \\ 2x+y+nz=p \end{cases}.$$

La matriu de coeficients i l'ampliada és $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & n \end{pmatrix}$, $A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & n & p \end{array}\right)$.

$\det A = 7n+23$.

$\det A = 0$, si $7n+23=0$, $n=\frac{-23}{7}$, el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1- & 5 \end{vmatrix} \neq 0$.

Si $n \neq \frac{-23}{7}$, per a tot $p \in R$, $\text{rang}A=3$, $\text{rang}A'=3$, $\text{n.incògnites}=3$. El sistema és compatible determinat, aleshores, la recta i el plànol s'intersecten en un punt.

Si $n=\frac{-23}{7}$, $\text{rang}A=2$.

Considerem la submatriu de A' formada per la primera, segona i quarta columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & p \end{vmatrix} = 7p-9.$$

Si $7p-9=0$, és a dir, si $p=\frac{9}{7}$, $\text{rang}A'=2$.

Aleshores, si $n=\frac{-23}{7}$, $p=\frac{9}{7}$, $\text{rang}A=2$, $\text{rang}A'=2$, $\text{n.incògnites}=3$. El sistema és compatible indeterminat, aleshores, la recta està continguda en el plànol.

Si $7p-9 \neq 0$, és a dir, si $p \neq \frac{9}{7}$, $\text{rang}A'=3$

Aleshores, si $n=\frac{-23}{7}$, $p \neq \frac{9}{7}$, $\text{rang}A=2$, $\text{rang}A'=3$, $\text{n.incògnites}=3$. El sistema és incompatible, aleshores, la recta és paral·lela al plànol.

Problema A.2. Setembre 2011

En l'espai es donen les rectes $r \equiv \begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases}$ i $s \equiv \begin{cases} x+2y-1=0 \\ 3y-z+2+\alpha=0 \end{cases}$.

Obteniu raonadament:
a) El valor de α perquè les rectes r i s estiguen contingudes en un plànol.
b) L'equació del plànol que conté les rectes r i s per al valor de α obtingut en l'apartat anterior.
c) L'equació del plànol perpendicular a la recta r que conté el punt $(1, 2, 1)$.

Solució:
a)
La recta $r \equiv \begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases}$ passa pel punt $A(3, -1, 2)$ i té vector director $\vec{v} = (1, 2, 1)$.

Passem la recta $s \equiv \begin{cases} x+2y-1=0 \\ 3y-z+2+\alpha=0 \end{cases}$ a forma paramètrica:

$s \equiv \begin{cases} x = 1-2\beta \\ y = \beta \\ z = 2+\alpha+3\beta \end{cases}$, passa pel punt $B(1, 0, 2+\alpha)$ i té vector director $\vec{w} = (-2, 1, 3)$.

Els vectors v, w són linealment independents.
A fi que les rectes r, s estiguen contingudes en un plànol els vectors $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{AB}\}$ han de ser linealment dependents, és a dir, el determinant format pels tres vectors ha de ser zero.
$\vec{AB} = (-2, 1, \alpha)$.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = 0$. Simplificant:

$5\alpha - 15 = 0$. Resolent l'equació: $\alpha = 3$.
Per tant, si $\alpha = 3$ les rectes estan contingudes en un plànol.
b)
L'equació del plànol que conté r i s és el plànol que passa pel punt A i té direcció v, w.

$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Simplificant: $x - y + z - 6 = 0$.

c)
El plànol perpendicular a r que passa per $P(1, 2, 1)$ és aquell que té vector normal o característic v i passa pel punt P.
El feix de plànol que té vector característic v té equació:
$\Omega \equiv x + 2y + z + D = 0$.
Si el punt P pertany al plànol aleshores:
$1 + 2\cdot 2 + 1 + D = 0$. Resolent l'equació: $D = -6$.
L'equació del plànol perpendicular a r que passa per P té equació:
$\Omega \equiv x + 2y + z - 6 = 0$.

Problema B.2. Setembre 2011

Es dóna la recta $r \equiv \begin{cases} x - 4y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ i el pla $\Pi_\alpha \equiv (2+2\alpha)x + y + \alpha z - 2 - 6\alpha = 0$ dependent del paràmetre real α.

Obtingueu raonadament:

a) L'equació del pla Π_α que passa pel punt $(1,1,0)$

b) L'equació del pla Π_α que és paral·lel a la recta r.

c) L'equació del pla Π_α que és perpendicular a la recta r.

Solució:

a)

Si el plànol $\pi\alpha$ conté el punt $(1,1,0)$ les seues coordenades satisfan l'equació:

$(2+2\alpha)1+1+\alpha\cdot 0-2-6\alpha=0$. Resolent l'equació:

$\alpha = \frac{1}{4}$. Aleshores, l'equació del plànol que cerquem és:

$\Pi_{\frac{1}{4}} \equiv \frac{5}{2}x + y + \frac{1}{4}z - \frac{7}{2} = 0$.

b)

Una recta i un plànol són paral·lels si el vector director de la recta és perpendicular al vector característic o normal del plànol.

Escrivim la recta $r \equiv \begin{cases} x - 4y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ en forma paramètrica:

$r \equiv \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$, el vector director de r és $v = (4,1,1)$.

El vector característic del plànol Π_α és $a = (2+2\alpha, 1, \alpha)$.

Els vectors v i a són ortogonal aleshores el seu producte escalar és zero:

$(4,1,1)(2+2\alpha,1,\alpha)=0$.

$8+8\alpha+1+\alpha=0$.

Resolent l'equació:

$\alpha=-1$. Aleshores, l'equació del plànol que cerquem és:

$\Pi_{-1} \equiv y - z + 4 = 0$.

c)

Una recta i un plànol són perpendiculars si el vector director de la recta és linealment dependent al vector característic o normal del plànol. Les components dels vectors són proporcionals.

$\frac{4}{2+2\alpha} = \frac{1}{1} = \frac{1}{\alpha}$. Resolent el sistema:

$\alpha = 1$. Aleshores, l'equació del plànol que cerquem és:

$\Pi_1 \equiv 3x + y + z - 8 = 0$.

Problema A.2. juny 2011

En l'espai es donen les rectes $r \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ i $s \equiv \begin{cases} 2x-y=3 \\ x-y-z=2 \end{cases}$.

Obteniu raonadament:
a) Un punt i un vector director de cada recta.
b) La posició relativa de les rectes r i s.
c) L'equació del pla que conté a r i és paral·lel a s.

Solució:
a)
Passem la recta $r \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ a la forma paramètrica:

$r \equiv \begin{cases} x = 2-\alpha \\ y = 4-\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$. Un punt és $P(2, 4, 0)$ i el vector director és $\vec{v} = (-1, -1, 1)$.

Passem la recta $s \equiv \begin{cases} 2x-y=3 \\ x-y-z=2 \end{cases}$ a la forma paramètrica:

$s \equiv \begin{cases} x = \beta \\ y = -3+2\beta \\ z = 1-\beta \end{cases}$. Un punt és $Q(0, -3, 1)$ i el vector director és $\vec{w} = (1, 2, -1)$.

b)
Els vectors v i w són linealment independents ja que no són proporcionals, $\frac{-1}{1} \neq \frac{-1}{2}$.
Aleshores les rectes són secants o bé es creuen.
Calculem $\overrightarrow{PQ}$:
$\overrightarrow{PQ} = (-2, -7, 1)$.
Estudiem la linealitat dels vectors $\{\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{PQ}\}$.
Calculem el determinant format pels tres vectors:

$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, aleshores, els vectors són linealment independents, per tant, les dues rectes es creuen.

c)
El plànol que conté a r i és paral·lel a s és el que passa pel punt P de la recta r i té vectors directors v, w:

$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$. Simplificant: $\Pi \equiv -x - z + 2 = 0$.

Problema B.2. juny 2011

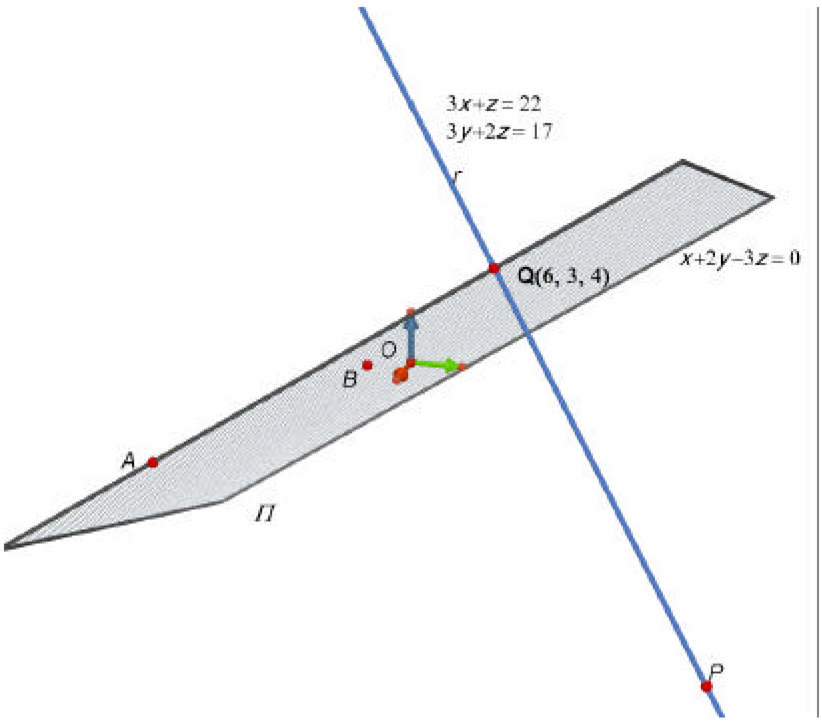
En l'espai es donen les rectes $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 3 \end{cases}$ i $s \equiv x-1 = y = z-3$.

Obteniu raonadament:
a) Un vector director de cadascuna de les rectes r i s.
b) L'equació del pla perpendicular a la recta r que passa pel punt $(0,1,3)$.
c) El punt intersecció de les rectes r i s i l'equació del pla Π que conté aquestes rectes r i s.

Solució:
a)
La recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 3 \end{cases}$ que està en forma paramètrica passa pel punt $P(0,1,3)$ i té vector director $\vec{v} = (1,-1,0)$.
La recta $s \equiv x-1 = y = z-3$ que està en forma contínua passa pel punt $Q(1,0,3)$ i té vector director $\vec{w} = (1,1,1)$.
Notem que v i w són linealment independents ja que no són proporcionals.
b)
El plànol perpendicular a r que passa pel punt $A(0,1,3)$ té vector característic o normal el vector director de la recta r.
El feix de plànols que té vector característic $\vec{v} = (1,-1,0)$ té equació:
$\Omega \equiv x - y + D = 0$.
Com que el punt A és el plànol Ω, satisfà la seua equació:
$0 - 1 + D = 0$. Resolent l'equació:
$D = 1$. El plànol que cerquem és:
$\Omega \equiv x - y + 1 = 0$.
c)
El punt intersecció de les dues rectes és punt que satisfà les equacions de les dues rectes. Si substituïm $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 3 \end{cases}$ en l'equació de la recta s:
$\lambda - 1 = 1 - \lambda = 3 - 3$. Resolent el sistema:
$\lambda = 1$.
Aleshores el punt intersecció és $R(1,0,3)$.
El plànol Π que conté les rectes r i s és el plànol que passa per R i té per vectors directors v, w:
$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Simplificant: $\Pi \equiv -x - y + 2z - 5 = 0$.

Problema A.2. setembre 2010
Es demana obtenir raonadament:
a) L'equació del pla Π que passa pels punts $O(0, 0, 0)$, $A(6, -3, 0)$ i $B(3, 0, 1)$.
b) L'equació de la recta r que passa pel punt $P(8, 7, -2)$ i és perpendicular a Π.
c) El punt Q del pla Π la distància al punt P del qual és menor que la distància de qualsevol altre punt del pla Π al punt P.

Solució:
a)
El plànol Π és el plànol que passa pel punt O i té vectors directors, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$.
$\overrightarrow{OA} = (6, -3, 0)$, $\overrightarrow{OB} = (3, 0, 1)$.
L'equació del plànol Π és:
$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 6 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$ Simplificant, $\Pi \equiv -x - 2y + 3z = 0$
b)
El vector característic o normal del plànol Π és $a = (-1, -2, 3)$
La recta r que passa pel punt $P(8, 7, -2)$ i és perpendicular a Π és la que passa pel punt P i té per vector director el vector característic del plànol Π:
$$r \equiv (x, y, z) = (8, 7, -2) + \alpha(-1, -2, 3) . \quad r \equiv \begin{cases} x = 8 - \alpha \\ y = 7 - 2\alpha \\ z = -2 + 3\alpha \end{cases}$$
c)
El punt Q que cerquem és la projecció de P sobre el plànol Π que és la intersecció de la recta r i el plànol Π.
Substituint les coordenades de l'equació paramètrica de la recta r en l'equació del plànol Π:
$-(8 - \alpha) - 2(7 - 2\alpha) + 3(-2 + 3\alpha) = 0$. Simplificant:
$14\alpha - 28 = 0$. Resolent l'equació:
$\alpha = 2$.
Substituint el valor $\alpha = 2$ en l'equació de la recta r les coordenades del punt Q són:
$Q(6, 3, 4)$.



Problema B.2. setembre 2010

Donades les dues rectes r i s d'equacions $r \equiv \frac{x-4}{3} = \frac{y-4}{2} = z-4$ i $s \equiv x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ es demana calcular raonadament:

a) Les coordenades del punt P d'intersecció de les rectes r i s.
b) L'angle que formen les rectes r i s.
c) L'equació implícita $Ax + By + Cz + D = 0$ del pla Π que conté les rectes r i s.

Solució:
a)
Escrivim les rectes r i s en forma paramètrica:

La recta $r \equiv \frac{x-4}{3} = \frac{y-4}{2} = z-4$, és $r \equiv \begin{cases} x = 4+3\alpha \\ y = 4+2\alpha \\ z = 4+\alpha \end{cases}$, passa pel punt $A(4, 4, 4)$ i té vector director $v = (3, 2, 1)$.

La recta $s \equiv x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$, és $s \equiv \begin{cases} x = \beta \\ y = 2\beta \\ z = 3\beta \end{cases}$, passa pel punt $B(0, 0, 0)$ i té vector director $w = (1, 2, 3)$.

Igualant les coordenades paramètriques de les dues rectes:

$\begin{cases} 4+3\alpha = \beta \\ 4+2\alpha = 2\beta \\ 4+\alpha = 3\beta \end{cases}$, Resolent el sistema $\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{cases}$.

Substituint $\alpha = -1$ en l'equació paramètrica de la recta r el punt O intersecció de les rectes r i s és:
$P(1, 2, 3)$.

b)
L'angle que formen les rectes r, s és igual a l'angle que formen els vectors directors d'ambdues:
Aplicant el producte escalar $v \cdot w = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\delta$ on δ és l'angle que formen v i w:

$$(3, 2, 1)(1, 2, 3) = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}\cos\delta .$$

$$10 = 14\cos\delta$$

$$\delta = \arccos\frac{5}{7} \approx 44º24'55''$$

c)
Notem que els vectors v, w són linealment independents, ja que les seues components no són proporcionals.
El plànol Π que conté les rectes r i s és el que passa pel punt P i té vectors directors v, w:

$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 .$$ Simplificant, $\Pi \equiv x - 2y + z = 0$.

Problema A.2. juny 2010

Donades les rectes d'equacions $r \equiv \begin{cases} 5x+y-z=4 \\ 2x-2y-z=-5 \end{cases}$ i $s \equiv \begin{cases} x-y=-5 \\ z=4 \end{cases}$, es demana:

a) Justificar que les rectes r i s és creuen.
b) Calcular raonadament la distància entre les rectes r i s.
c) Determinar l'equació del pla Π que és paral·lel i equidistant a les rectes r i s.

Solució:
a)
Ho farem de forma vectorial. Escrivim les rectes r i s en forma paramètrica:

$r \equiv \begin{cases} x = 3-\lambda \\ y=\lambda \\ z = 11-4\lambda \end{cases}$. Un punt de r és $A(3,0,11)$ i el vector director $v=(-1,1,-4)$.

$s \equiv \begin{cases} x=-5+\mu \\ y=\mu \\ z=4 \end{cases}$. Un punt de s és $B(-5,0,4)$ i el vector director $w=(1,1,0)$.

Els vectors v, w són linealment independents ja que les components no són proporcionals. Aleshores, les rectes r, s és tallen o bé és creuen.

$\vec{AB}=(-8,0,-7)$

Estudiem la linealitat dels vectors $\{v, w, \vec{AB}\}$. Calculem el determinant format pels tres vectors:

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$, aleshores, $\{v, w, \vec{AB}\}$ són linealment independents. Per tant, les rectes r i s es creuen.

b)
Com que les rectes r i s es creuen, $d(r,s)=\left|\dfrac{[v, w, \overrightarrow{AB}]}{\|v\times w\|}\right|$.

$[v, w, \vec{AB}] = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -18$. $v\times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4i-4j-2k = (4,-4,-2)$.

$\|v\times w\| = \sqrt{4^2+(-4)^2+(-2)^2} = 6$.

$d(r,s)=\left|\dfrac{[v, w, \overrightarrow{AB}]}{\|v\times w\|}\right| = \left|\dfrac{-18}{6}\right| = 3$.

c)
El plànol que cerquem és el que passa pel punt mig del segment $\overline{AB}$ i té vector característic o normal $v\times w=(4,-4,-2)$.

El punt mig del segment $\overline{AB}$ és $M\left(\dfrac{3-5}{2}, \dfrac{0+0}{2}, \dfrac{11+4}{2}\right)$, $M\left(-1, 0, \dfrac{15}{2}\right)$.

El feix de plànols de vector característic $v\times w=(4,-4,-2)$ és:

$\Pi \equiv 4x-4y-2z+D=0$, el punt M pertany al plànol, aleshores:

$4(-1)-4\cdot 0-2\dfrac{15}{2}+D=0$. Resolent l'equació: $D=-19$. El plànol que cerquem és:

$\Pi \equiv 4x-4y-2z-19=0$.

Problema B.2. juny 2010
Siga la recta de vector director $(2,-1,1)$ que passa pel punt $P(0,3,-1)$, Es demana:
a) Obtenir raonadament la distància del punt $A(0,1,0)$ a la recta r.
b) Calcular raonadament l'angle que forma la recta que passa pels punts P i A amb la recta r en el punt P.
c) Si Q és el punt on la recta r talla el pla d'equació $z=0$, comprovar que el triangle de vèrtexs APQ té angles iguals en els vèrtexs P i Q.

Solució:
a)
La distància del punt A a la recta r és $d(A,r)=\dfrac{\left\|v\times\overrightarrow{PA}\right\|}{\|v\|}$ on v és el vector director de la recta r i P un punt de la recta r.
$v=(2,-1,1)$, $\overline{PA}=(0,-2,1)$.

$$v\times\dot{PA}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=i-2j-4k=(1,-2,4).\quad \left\|v\times\overrightarrow{PA}\right\|=\sqrt{1^2+(-2)^2+4^2}=\sqrt{21}.$$

$$\|v\|=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{6}.$$

$$d(A,r)=\frac{\left\|v\times\overrightarrow{PA}\right\|}{\|v\|}=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{14}}{2}.$$

b)
El vector director de la recta que passa pels punts P , A és $\dot{PA}=(0,-2,1)$.
L'angle que formen dos rectes és igual a l'angle que formen els vectors directors.
$v\cdot\overrightarrow{PA}=\|v\|\cdot\left\|\overrightarrow{PA}\right\|\cdot\cos\delta$, on δ és l'angle que formen v i $\dot{PA}$:

$$(2,-1,1)(0,-2,1)=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{0^2+(-2)^2+1^2}\cos\delta.$$

$$3=\sqrt{30}\cos\delta.\quad \cos\delta=\frac{3}{\sqrt{30}}.\quad \delta=\arccos\frac{3}{\sqrt{30}}\approx 56º47'21''$$

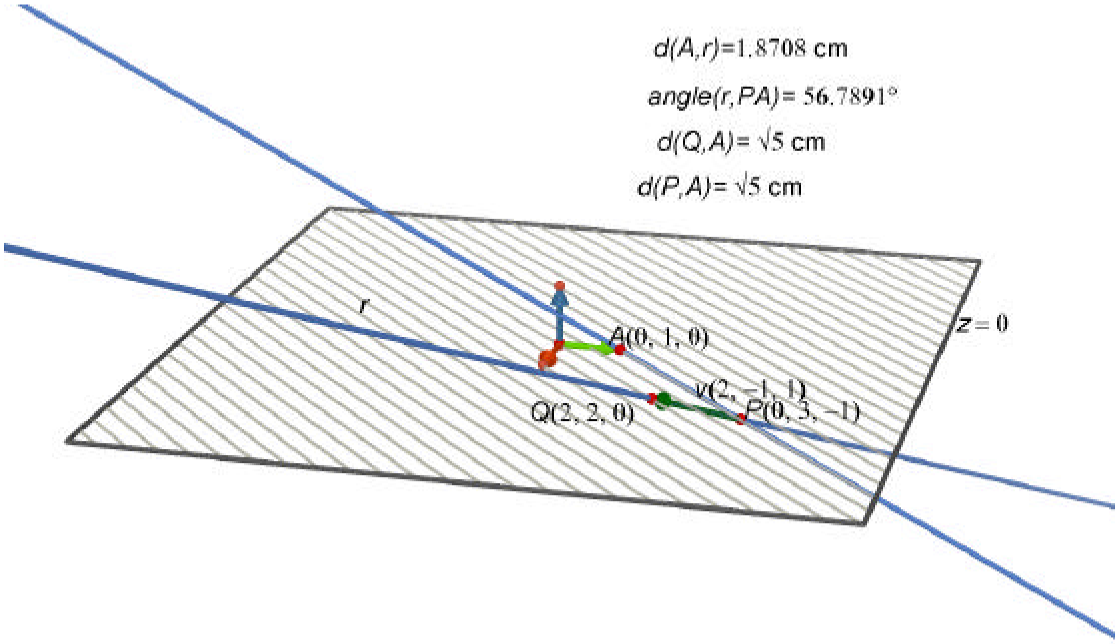
c)
Determinem el punt Q intersecció de la recta r talla el pla d'equació $z=0$, resolent el sistema format per les seues equacions:

L'equació paramètrica de la recta r és $r\equiv\begin{cases}x=2\lambda\\ y=3-\lambda\\ z=-1+\lambda\end{cases}$. Substituint en l'equació del plànol:
$-1+\lambda=0$. Resolent l'equació:
$\lambda=1$.
Les coordenades del punt Q són: $Q(2,2,0)$.
Els vèrtexs P i Q del triangle tenen el mateix angle si els costats $\overline{PA}$, $\overline{QA}$ són iguals:

$$\overline{PA}=\left\|\overrightarrow{PA}\right\|=\sqrt{0^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}.$$

$$\dot{QA}=(-2,-1,0).$$

$$\overline{QA}=\left\|\overrightarrow{QA}\right\|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{5}.$$


d(A,r)=1.8708 cm
angle(r,PA)= 56.7891°
d(Q,A)= √5 cm
d(P,A)= √5 cm
r
z = 0
A(0, 1, 0)
v(2, −1, 1)
Q(2, 2, 0)
P(0, 3, −1)

Problema 2.1. setembre 2009

Atesos els punts $P(3,-1,4)$ i $Q(1,0,-1)$ i el pla Π d'equació $\Pi \equiv x-2y+2z+5=0$ es demana que calculeu raonadament:

a) L'equació de la recta r que passa pel punt P i és perpendicular al pla Π.

b) L'equació dels plans que passen pel punt P i són perpendiculars al pla Π.

c) L'equació del pla Π' que passa pels punts P i Q i és perpendicular al pla Π.

Solució:

a)

El vector característic o normal del plànol $\Pi \equiv x-2y+2z+5=0$ és $a=(1,-2,2)$

Una recta és perpendicular a un plànol si el vector director de la recta és el característic del plànol. L'equació paramètrica de la recta r és:

$r \equiv \begin{cases} x=3+\alpha \\ y=-1-2\alpha \\ z=4+2\alpha \end{cases}$. $r \equiv x-3=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-4}{2}$, $r \equiv \begin{cases} 2x+y-7=0 \\ y+z-5=0 \end{cases}$.

b)

Les solucions són infinites, com que la recta r és perpendicular al plànol, la solució és el feix de plànols que conté la recta r:

$\alpha(2x+y-7)+\beta(y+z-5)=0$, on α, β són real no nuls a la vegada.

c)

$\vec{PQ}=(-2,1,-5)$.

Els vectors $\{\vec{a}, \vec{PQ}\}$ són linealment independents ja que les components no són proporcionals.

Si dos plànols són perpendiculars, el vector característic d'un d'ells és director de l'altre.

L'equació del pla Π' que passa pels punts P i Q i és perpendicular al pla Π és el plànol que passa pel punt P i té vectors directors, $\{\vec{a}, \vec{PQ}\}$. La seua equació és:

$\Pi' \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix}=0$. Simplificant: $\Pi' \equiv 8x+y-3z-3=0$.

Problema 2.2. setembre 2009

Siga Π el pla d'equació $\Pi \equiv 3x+2y+4z-12=0$. Calculeu raonadament:

a) Les equacions dels dos plans paral·lels a Π que disten 5 unitats de Π.

b) Els tres punts A, B, C, intersecció del pla Π amb cadascun dels tres eixos coordenats.

c) Els tres angles del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Solució:

El feix de plànols paral·lels al plànol Π té equació:

$\Pi_D \equiv 3x+2y+4z+D=0$.

La distància del dos plànols paral·lels Π, Π_D és igual a la distància d'un punt P del plànol Π al plànol Π_D.

Un punt del plànol Π és una solució particular de la seua equació:

$P(0,0,3)$.

$5 = d(\Pi, \Pi_D) = d(P, \Pi_D) = \left| \dfrac{3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + D}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2}} \right|$.

$\left| \dfrac{12 + D}{\sqrt{29}} \right| = 5$.

$|12 + D| = 5\sqrt{29}$. Aleshores:

$12 + D = \pm 5\sqrt{29}$. Per tant, $D = -12 \pm 5\sqrt{29}$. Hi ha dues solucions:

$\Pi_1 \equiv 3x + 2y + 4z - 12 + 5\sqrt{29} = 0$, $\Pi_2 \equiv 3x + 2y + 4z - 12 - 5\sqrt{29} = 0$.

b)

El punt A intersecció del plànol Π i l'eix OX que té equació, $OX \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, es determina resolent els sistema format per les tres equacions:

$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 12 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, les coordenades són $A(4, 0, 0)$.

El punt B intersecció del plànol Π i l'eix OY que té equació, $OY \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, es determina resolent els sistema format per les tres equacions:

$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 12 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, les coordenades són $B(0, 6, 0)$.

El punt C intersecció del plànol Π i l'eix OZ que té equació, $OZ \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, es determina resolent els sistema format per les tres equacions:

$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 12 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, les coordenades són $C(0, 0, 3)$.

c)

Calculem l'angle A del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\vec{AB} = (-4, 6, 0)$, $\vec{AC} = (-4, 0, 3)$. Per calcular l'angle utilitzarem el producte escalar dels dos vectors:

$(-4, 6, 0)(-4, 0, 3) = \sqrt{(-4)^2 + 6^2 + 0^2}\sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 3^2} \cos A$.

$16 = 5\sqrt{52} \cos A$, $\cos B = \dfrac{16}{5\sqrt{52}}$, $A = \arccos \dfrac{8}{5\sqrt{13}} \approx 63^o 39' 21''$.

Calculem l'angle B del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\vec{BA} = (4, -6, 0)$, $\vec{BC} = (0, -6, 3)$.

$(4, -6, 0)(0, -6, 3) = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 0^2}\sqrt{0^2 + (-6)^2 + 3^2} \cos B$.

$36 = \sqrt{52}\sqrt{45} \cos B$, $B = \arccos \dfrac{6}{\sqrt{65}} \approx 41^o 54' 32''$.

$C = 180^o - (A + B) = 180^o - (63^o 39' 21'' + 41^o 54' 32'') = 74^o 26' 7''$.

Problema 2.1. juny 2009

Siguen A, B i C els punts d'intersecció del pla d'equació $x+4y-2z-4=0$ amb els eixos coordenats OX, OY, OZ, respectivament. Es demana calcular raonadament:

a) L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

b) El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

c) Els tres angles interiors del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Solució:

a)

El punt A intersecció del plànol i l'eix OX que té equació, $OX \equiv \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$, es determina resolent els sistema format per les tres equacions:

$\begin{cases} x+4y-2z=4 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$, les coordenades són $A(4,0,0)$.

El punt B intersecció del plànol i l'eix OY que té equació, $OY \equiv \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$, es determina resolent els sistema format per les tres equacions:

$\begin{cases} x+4y-2z=4 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases}$, les coordenades són $B(0,1,0)$.

El punt C intersecció del plànol i l'eix OZ que té equació, $OZ \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, es determina resolent els sistema format per les tres equacions:

$\begin{cases} x+4y-2z=4 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$, les coordenades són $C(0,0,-2)$.

$\vec{AB}=(-4,1,0)$, $\vec{AC}=(-4,0,-2)$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|$.

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-2i-8j+4k=(-2,-8,4).$$

$\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{(-2)^2+(-8)^2+4^2}=2\sqrt{21}$. Aleshores: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{21}$.

c)

$\vec{BC}=(0,-1,-2)$. Les mesures dels costats són:

$a=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\sqrt{0^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$. $b=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{(-4)^2+0^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$.

$c=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=(-4,1,0)=\sqrt{(-4)^2+1^2+0^2}=\sqrt{17}$.

El perímetre és la suma dels tres costats: $a+b+c=3\sqrt{5}+\sqrt{17}$.

c)

Calculem l'angle A del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Per calcular l'angle utilitzarem el producte escalar dels vectors $\vec{AB}=(-4,1,0)$, $\vec{AC}=(-4,0,-2)$.

$(-4,1,0)(-4,0,-2)=2\sqrt{17}\sqrt{5}\cos A$.

$16=2\sqrt{17}\sqrt{5}\cos A$, $\cos A=\dfrac{8}{\sqrt{85}}$, $A=\arccos\left(\dfrac{8}{\sqrt{85}}\right)\approx 29^{o}48'18''$.

Calculem l'angle B del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Per calcular l'angle utilitzarem el producte escalar dels vectors $\vec{BA}=(4,-1,0)$, $\vec{BC}=(0,-1,-2)$.

$(4,-1,0)(0,-1,-2)=\sqrt{17}\sqrt{5}\cos B$. $1=\sqrt{17}\sqrt{5}\cos B$, $B=\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{85}}\right)\approx 83^{o}46'23''$.

$C=180^{o}-(A+B)=180^{o}-(29^{o}48'18''+83^{o}46'23'')=66^{o}25'19''$.

Problema 2.2. juny 2009

Donats els punts $O(0,0,0)$, $A(4,4,0)$ i $P(0,0,12)$, es demana obtenir raonadament:

a) L'equació de la recta que passa per A i és perpendicular al pla d'equació $z=0$.

b) L'equació del pla que complesca les dues següents condicions:

1) Passe pel punt P i per un punt Q de la recta d'equació $x=y=4$.

2) Siga perpendicular a la recta que passa per O i Q.

Solució:

a)

Una recta és perpendicular a un plànol si el vector director de la recta és el característic o normal del plànol. El vector característic del plànol $z=0$ és $a=(0,0,1)$.

L'equació de la recta r que passa pel punt A i té vector director a té equació paramètrica: $r\equiv\begin{cases}x=4\\ y=4\\ z=\lambda\end{cases}$.

b)

Notem que la recta d'equació $x=y=4$ és la recta r de l'apartat a).

Un punt genèric d'aquesta recta és $Q(4,4,\lambda)$.

Si el plànol que cerquem és perpendicular a la recta que passa per O i Q, el vector característic d'aquest plànol és $\vec{OQ}=(4,4,\lambda)$.

El feix de plànols que té per vector característic $\vec{OQ}=(4,4,\lambda)$ té equació:

$\Pi_{\lambda,D}\equiv 4x+4y+\lambda z+D=0$.

Els punts P i Q pertanyen al plànol que cerquem aleshores, satisfan la seua equació:

$\begin{cases}4\cdot 0+4\cdot 0+\lambda\cdot 12+D=0\\ 4\cdot 4+4\cdot 4+\lambda\cdot\lambda+D=0\end{cases}$. Simplificant: $\begin{cases}12\lambda+D=0\\ \lambda^2+D=32\end{cases}$.

Resolent el sistema: $\begin{cases}\lambda=8\\ D=96\end{cases}$, o bé, $\begin{cases}\lambda=4\\ D=48\end{cases}$. L'apartat té dues solucions:

Si $\begin{cases}\lambda=8\\ D=96\end{cases}$, $\Pi\equiv 4x+4y+8z+96=0$. Simplificant: $\Pi\equiv x+y+2z+24=0$.

Si $\begin{cases}\lambda=4\\ D=48\end{cases}$, $\Pi'\equiv 4x+4y+4z+48=0$. Simplificant: $\Pi'\equiv x+y+z+12=0$.

Problema 2.1. setembre 2008

Atesos els dos plans $\Pi_1 \equiv x+y+z=3$ i $\Pi_2 \equiv x+y-\alpha z=0$, es demana que calculeu raonadament:

a) El valor de α perquè els plans Π_1 i Π_2 siguen perpendiculars i, per a aquest valor de α obteniu les equacions paramètriques de la recta intersecció d'aquests dos plans.

b) El valor de α perquè els plans Π_1 i Π_2 siguen paral·lels, i per a aquest valor de α obteniu les equacions paramètriques de la recta intersecció d'aquests dos plans Π_1 i Π_2.

Solució:

a)

Dos plànols són perpendiculars si els seus vectors característics o normals són ortogonals (el seu producte escalar és zero).

El vector característic de Π_1 és $a=(1,1,1)$.

El vector característic de Π_2 és $b=(1,1,-\alpha)$.

$ab=0$.

$(1,1,1)(1,1,-\alpha)=0$.

$1+1-\alpha=0$. Resolent l'equació:

$\alpha=2$.

La recta intersecció d'aquest dos plànols té equació general:

$r \equiv \begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$. Resolent el sistema l'equació paramètrica de la recta és:

$$r \equiv \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=\lambda \\ z=1 \end{cases}.$$

b)

Dos plànols són paral·lels si els seus vectors característics són linealment dependents (són proporcionals les seues components) i no tenen intersecció.

$\frac{1}{1}=\frac{1}{1}=\frac{-\alpha}{1}$. Resolent el sistema:

$\alpha=-1$.

En aquest cas els plànols són $\Pi_1 \equiv x+y+z=3$ i $\Pi_2 \equiv x+y+z=0$.

$\frac{1}{1}=\frac{1}{1}=\frac{1}{1}\neq\frac{0}{3}$ els plànols són paral·lels.

La distància entre dos plànols paral·lels és igual a la distància d'un punt d'un plànol a l'altre plànol.

Un punt del plànol Π_1 és una solució particular de la seua equació:

$P(0,0,3)$ pertany al plànol Π_1.

$$d(\Pi_1,\Pi_2)=d(P,\Pi_2)=\left|\frac{0+0+3}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right|=\sqrt{3}.$$

Problema 2.2. setembre 2008

Atesos el punt $O(0, 0, 0)$ i el pla $\Pi \equiv x + y + z = 6$, es demana que calculeu raonadament:

a) L'equació de la recta r que passa per O i és perpendicular al pla Π.
b) Les coordenades del punt simètric de O respecte del pla Π.
c) L'equació del pla que conte l'eix OX i la recta r.

Solució:

a)

Una recta és perpendicular a un plànol si el vector característic o normal del plànol és vector director de la recta.

El vector característic del plànol Π és $a = (1, 1, 1)$. L'equació paramètrica de la recta r és:

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}.$$

b)

Determinem el punt projecció de O sobre el plànol Π. Que és la intersecció del plànol Π amb la recta r (perpendicular al plànol Π que passa per O).

Resolent el sistema format per l'equació del plànol Π i la recta r:

Substituint les coordenades paramètriques de r en el plànol Π:

$\lambda + \lambda + \lambda = 6$. Resolent l'equació:

$\lambda = 2$. El punt projecció té coordenades:

$O_p(2, 2, 2)$.

El punt $O'(x, y, z)$ simètric de O respecte del plànol Π compleix:

$\overrightarrow{OO'} = 2 \cdot \overrightarrow{OO_p}$

$(x, y, z) = 2(2, 2, 2)$. Resolent l'equació vectorial: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 4 \end{cases}$, aleshores les coordenades del punt simètric són: $O'(4, 4, 4)$

c)

L'eix OX té equació: $OX \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ el vector director és $v = (1, 0, 0)$.

Els vectors de la recta r i l'eix OX són linealment independents.

L'equació del pla que conte l'eix OX i la recta r, és el plànol que passa pel punt O i té direcció els vectors $\{a, v\}$:

$\Omega \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Simplificant: $\Omega \equiv y - z = 0$.

Problema 2.1. juny 2008

Es donen els punts $A(2,1,1)$ i $B(1,0,-1)$, i la recta r d'equació $r \equiv x-5=y=\frac{z+2}{-2}$.

Es demana que calculeu raonadament:
a) El punt C de r que equidistà de A i B.

b) L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Solució:
a)

L'equació paramètrica de la recta $r \equiv x-5=y=\frac{z+2}{-2}$ és $r \equiv \begin{cases} x=5+\alpha \\ y=\alpha \\ z=-2-2\alpha \end{cases}$.

Un punt qualsevol de la recta r de coordenades $C(5+\alpha,\ \alpha,\ -2-2\alpha)$.

Si C equidista de A i B si $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$.

$\overrightarrow{AC}=(3+\alpha,\ \alpha-1,\ -3-2\alpha)$. $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{(3+\alpha)^2+(\alpha-1)^2+(-3-2\alpha)^2}$.

$\overrightarrow{BC}=(4+\alpha,\ \alpha,\ -1-2\alpha)$. $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\sqrt{(4+\alpha)^2+\alpha^2+(-1-2\alpha)^2}$.

$\sqrt{(3+\alpha)^2+(\alpha-1)^2+(-3-2\alpha)^2}=\sqrt{(4+\alpha)^2+\alpha^2+(-1-2\alpha)^2}$.

Elevant al quadrat i simplificant:
$4\alpha=-2$. Resolent l'equació:

$\alpha=\frac{-1}{2}$. Aleshores el punt de r que equidista de A i b és:

$C\left(\frac{9}{2},\frac{-1}{2},-1\right)$.

b)

$\overrightarrow{AB}=(-1,-1,-2)$, $\overrightarrow{AC}=\left(\frac{5}{2},\frac{-3}{2},-2\right)$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & -2 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & -2 \end{vmatrix}=-i-7j+4k=(-1,-7,4).$$

$\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{(-1)^2+(-7)^2+4^2}=\sqrt{66}$. Aleshores: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{\sqrt{66}}{2}$.

Problema 2.2. juny 2008

Ateses la recta r, intersecció dels plans $y+z=0$ i $x-2y-1=0$ i la recta s d'equació $s\equiv\frac{x}{2}=y-1=-z+3$, es demana el següent:

a) Obtenir, raonadament, les equacions paramètriques de r i s.
b) Expliqueu d'un mode raonat quina és la posició relativa de les rectes r i s.
c) Calculeu la distància entre les rectes r i s.

Solució:

La recta r te equació general $r\equiv\begin{cases}y+z=0\\x-2y=1\end{cases}$. Resolent el sistema, l'equació paramètrica de r és:

$r\equiv\begin{cases}x=1+2\lambda\\y=\lambda\\z=-\lambda\end{cases}$. El punt de r és $P(1,0,0)$ i el vector director és $v=(2,1,-1)$

Arreglant la recta s la seua equació contínua és: $s\equiv\frac{x}{2}=y-1=\frac{z-3}{-1}$.

L'equació paramètrica és: $s\equiv\begin{cases}x=2\mu\\y=1+\mu\\z=3-\lambda\end{cases}$. El punt de s és $Q(0,1,3)$ i el vector director és $w=(2,1,-1)$.

b)
Els vectors directors de les dues rectes són linealment dependents, aleshores, les rectes són paral·leles o coincidents.

Calculem $\overrightarrow{PQ}$.

$\overrightarrow{PQ}=(-1,1,3)$.

Estudiem la dependència lineal dels vectors $\{v,\overrightarrow{PQ}\}$.

Els vectors $\{v,\overrightarrow{PQ}\}$ són linealment independents ja que les components no són proporcionals, $\frac{2}{-1}\neq\frac{1}{1}$. Aleshores, les rectes són paral·leles.

c)
La distància entre dues rectes paral·leles és igual a la distància d'un punt d'una recta a l'altra recta:

$$d(r,s)=d(P,s)=\frac{\left\|\overrightarrow{PQ}\times w\right\|}{\|w\|}.$$

$$\overrightarrow{PQ}\times w=\begin{vmatrix}i & j & k\\-1 & 1 & 3\\2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-4i+5j-3k=(-4,5,-3).$$

$\left\|\overrightarrow{PQ}\times w\right\|=\sqrt{(-4)^2+5^2+(-3)^2}=5\sqrt{2}$. $\|w\|=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

Aleshores la distància entre les dues rectes és:

$$d(r,s)=d(P,s)=\frac{\left\|\overrightarrow{PQ}\times w\right\|}{\|w\|}=\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Problema 2.1. setembre 2007

Atès el pla $\Pi \equiv 2x+y+3z-1=0$ i el punt $Q(2,1,3)$, es demana que calculeu:

a) La distància del punt Q al pla Π.

b) L'àrea del triangle els vèrtexs del qual P_1, P_2, P_3 són els punts d'intersecció del pla Π amb els eixos coordenats.

c) El volum de tetraedre de vèrtexs P_1, P_2, P_3 i Q.

Solució:

a)

$$d(Q,\Pi)=\left|\frac{2\cdot 2+1+3\cdot 3-1}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}}\right|=\frac{13}{\sqrt{14}}=\frac{13\sqrt{14}}{14}.$$

b)

El punt P_1 intersecció del plànol i l'eix OX que té equació, $OX\equiv\begin{cases}y=0\\ z=0\end{cases}$, es determina resolent el sistema format per les tres equacions:

$\begin{cases}2x+y+3z=1\\ y=0\\ z=0\end{cases}$, les coordenades són $P_1\left(\frac{1}{2},0,0\right)$.

El punt P_2 intersecció del plànol i l'eix OY que té equació, $OY\equiv\begin{cases}x=0\\ z=0\end{cases}$, es determina resolent el sistema format per les tres equacions:

$\begin{cases}2x+y+3z=1\\ x=0\\ z=0\end{cases}$, les coordenades són $P_2(0,1,0)$.

El punt P_3 intersecció del plànol i l'eix OZ que té equació, $OZ\equiv\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$, es determina resolent el sistema format per les tres equacions:

$\begin{cases}2x+y+3z=1\\ x=0\\ y=0\end{cases}$, les coordenades són $P_3\left(0,0,\frac{1}{3}\right)$.

$\overrightarrow{P_1P_2}=\left(\frac{-1}{2},1,0\right)$, $\overrightarrow{P_1P_3}=\left(\frac{-1}{2},0,\frac{1}{3}\right)$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{P_1P_2P_3}$ és $S=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}\right\|$.

$$\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{-1}{2} & 1 & 0\\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}i+\frac{1}{6}j+\frac{1}{2}k=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right).$$

$$\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}\right\|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{6},\ S=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}\right\|=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{14}}{6}=\frac{\sqrt{14}}{12}$$

c)

El volum del tetraedre de vèrtexs P_1, P_2, P_3 i Q és: $V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3},\overrightarrow{P_1Q}\right]\right|$.

$\overrightarrow{P_1Q} = \left(\frac{3}{2}, 1, 3\right)$.

$$\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1Q}\right] = \begin{vmatrix} \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{13}{6}. \quad V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1Q}\right]\right| = \frac{1}{6}\frac{13}{6} = \frac{13}{36}.$$

Problema 2.2. setembre 2007

Atesos els plans Π_1 i Π_2 d'equacions $\Pi_1 \equiv x + 2y + z + 3 = 0$ i $\Pi_2 \equiv 2x + y - z - 6 = 0$, es demana el següent:

a) Calculeu l'angle α que formen els plans Π_1 i Π_2.

b) Calculeu l'equació paramètrica de la recta r, intersecció dels plans Π_1 i Π_2.

c) Comproveu que el pla Π d'equació $\Pi \equiv x + y - 1 = 0$ és el pla bisector de Π_1 i Π_2, és a dir, Π forma un angle $\frac{\alpha}{2}$ amb cadascun dels plans Π, on α és l'angle obtingut en l'apartat a).

Solució:

a)

El vector característic del plànol Π_1 és $a = (1, 2, 1)$,

El vector característic del plànol Π_2 és $b = (2, 1, -1)$.

L'angle que formen dos plànols és l'angle que formen els vectors característics d'ambdós. Ho calcularem mitjançant el producte escalar:

$$(1, 2, 1)(2, 1, -1) = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}\cos\alpha$$

$3 = 6\cos\alpha$. $\alpha = \arccos\frac{1}{2} = 60º$.

b)

La recta r té equació general la intersecció dels dos plànols.

$r \equiv \begin{cases} x + 2y + z = -3 \\ 2x + y - z = 6 \end{cases}$. Resolent el sistema, l'equació paramètrica de la recta r és:

$$\begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}.$$

c)

El vector característic del plànol $\Pi \equiv x + y - 1 = 0$ és $c = (1, 1, 0)$

Calculem l'angle β que formen els plànols Π_1 i Π (angle que formen els vectors característics).

$$(1, 2, 1)(1, 1, 0) = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}\cos\beta.$$

$3 = \sqrt{6}\sqrt{2}\cos\beta$, $\beta = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = 30º$. Aleshores, $\beta = \frac{\alpha}{2}$.

Calculem l'angle γ que formen els plànols Π_2 i Π

$$(2, 1, -1)(1, 1, 0) = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}\cos\gamma.$$

$3 = \sqrt{6}\sqrt{2}\cos\gamma$, $\gamma = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = 30º$. Aleshores, $\gamma = \frac{\alpha}{2}$.

Problema 2.1. juny 2007

Ateses les dues rectes r i s, que es tallen, d'equacions

$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{2y-1}{-6} = \frac{2z-3}{6}$, $s \equiv \frac{x-3}{-2} = \frac{2y+3}{2} = \frac{z-1}{4}$, es demana que calculeu:

a) El punt P de tall de les rectes r i s.

b) Un vector direccional de r i un altre de s, i l'angle α que formen les rectes r i s en el punt de tall P.

c) L'equació implícita $ax+by+cz+d=0$ del pla Π que conté les rectes r i s.

Solució:

a)

La recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{2y-1}{-6} = \frac{2z-3}{6}$ en forma contínua és, $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-\frac{1}{2}}{-3} = \frac{z-\frac{3}{2}}{3}$.

L'equació en forma paramètrica és: $r \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = \frac{1}{2} - 3\lambda \\ z = \frac{3}{2} + 3\lambda \end{cases}$.

La recta $s \equiv \frac{x-3}{-2} = \frac{2y+3}{2} = \frac{z-1}{4}$ en forma contínua és $s \equiv \frac{x-3}{-2} = \frac{y+\frac{3}{2}}{1} = \frac{z-1}{4}$.

L'equació en forma paramètrica és: $s \equiv \begin{cases} x = 3-2\mu \\ y = \frac{-3}{2} + \mu \\ z = 1+4\mu \end{cases}$.

Per determinar el punt d'intersecció de les dues rectes, igualem les coordenades de les equacions paramètriques:

$\begin{cases} 1+2\lambda = 3-2\mu \\ \frac{1}{2} - 3\lambda = \frac{-3}{2} + \mu \\ \frac{3}{2} + 3\lambda = 1+4\mu \end{cases}$. Resolent el sistema: $\begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ \mu = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Substituint el valor $\lambda = \frac{1}{2}$ en l'equació paramètrica de la recta r, el punt intersecció de les dues rectes és: $P(2,-1,3)$.

b)

El vector director de la recta r, $v = (2,-3,3)$. El vector director de la recta s és $w = (-2,1,4)$. L'angle que formen dues rectes és igual a l'angle que formen els seus vectors directors. Utilitzarem el producte escalar per determinar-lo:

$(2,-3,3)(-2,1,4) = \sqrt{2^2+(-3)^2+3^2}\sqrt{(-2)^2+1^2+4^2}\cos\alpha$.

$5 = \sqrt{22}\sqrt{21}\cos\alpha$. $\alpha = \arccos\frac{5}{\sqrt{22\cdot 21}} \approx 76º32'55''$

c)

El plànol Π que conté les dues rectes secants r, s és igual al plànol que passa per P i té direcció els vectors linealment independents $\{v, w\}$. La seua equació és:

$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 2 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Simplificant: $\Pi \equiv -15x - 14y - 4z + 28 = 0$.

Problema 2.2. juny 2007

Atesos el punt $Q(3,-1,4)$ i la recta r d'equació paramètrica $r \equiv \begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases}$ es demana el següent:

a) Trobeu la distància del punt Q a la recta r.
b) Justifiqueu que la recta s que passa per Q i té $(1,-1,1)$ com a vector direccional no talla a r.
c) Calculeu la distància entre les rectes r i s.

Solució:
a)
Un punt de la recta r és $A(-2,0,1)$ i el vector director és $v = (3,-2,4)$.

La distància del punt Q a la recta r és: $d(Q,r) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AQ} \times v\right\|}{\|v\|}$.

$\overrightarrow{AQ} = (5,-1,3)$. $\overrightarrow{AQ} \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2i - 11j - 7k = (2,-11,7)$.

$\left\|\overrightarrow{AQ} \times v\right\| = \sqrt{2^2 + (-11)^2 + 7^2} = \sqrt{174}$, $\|v\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{29}$.

$d(Q,r) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AQ} \times v\right\|}{\|v\|} = \dfrac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}} = \sqrt{6}$.

b)
Siga $w = (1,-1,1)$ el vector director de la recta s.
Els vectors $\{v, w\}$ són linealment independents ja que les seues components no són proporcionals, $\dfrac{3}{1} \neq \dfrac{-2}{-1}$. Estudiem la linealitat dels vectors $\{v, w, \overrightarrow{AQ}\}$. Calculem el determinant format pels tres vectors.

$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, aleshores, $\{v, w, \overrightarrow{AQ}\}$ són L.I.. Per tant les rectes es creuen.

c)
La distància entre les dues rectes que es creuen és: $d(r,s) = \dfrac{\left|\left[v, w, \overrightarrow{AQ}\right]\right|}{\|v \times w\|}$.

$\left[v, w, \overrightarrow{AQ}\right] = 6$. $v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2i + j - k = (2,1,-1)$. $\|v \times w\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$.

$d(r,s) = \dfrac{\left|\left[v, w, \overrightarrow{AQ}\right]\right|}{\|v \times w\|} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$.

Problema 2.1. setembre 2006
En l'espai es consideren:
La recta r intersecció dels plans d'equacions implícites $2x-2y-z=9$ i $4x-y+z=42$. La recta s que passa pels punts $(1,3,-4)$ i $(3,-5,-2)$. Es demana:
a) Calculeu les equacions paramètriques de la recta r i de la recta s.
b) Justifiqueu que les rectes r i s es creuen.
c) Calculeu un vector direccional de la recta t, perpendicular comuna a les rectes r i s. Calculeu el punt P intersecció de les rectes s i t.

Solució:
a)
La recta r té equacií implícita $r\equiv\begin{cases}2x-2y-z=9\\4x-y+z=42\end{cases}$, resolent el sistema, l'equació paramètrica és: $r\equiv\begin{cases}x=\dfrac{25}{2}-\dfrac{1}{2}\lambda\\y=8-\lambda\\z=\lambda\end{cases}$, un punt de la recta r és $A\left(\dfrac{25}{2},8,0\right)$ i el vector director és, $v=(-1,-2,2)$.
L'equació paramètrica de la recta que passa pels punts $B(1,3,-4)$ i $C(3,-5,-2)$, té vector director $\vec{BC}=(2,-8,2)$, la seua equació és:

$$s\equiv\begin{cases}x=1+2\mu\\y=3-8\mu\\z=-4+2\mu\end{cases}$$

b)
Els vectors directors de les rectes $\{v,\vec{BC}\}$ són linealment independents ja que les components no són proporcionals, aleshores, les rectes són secants o es creuen.
Estudiem la linealitat dels vectors $\{v,\vec{BC},\vec{AB}\}$.
$\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{-23}{2},-6,-4\right)$. Calculem el determinant format pels vectors $\{v,\vec{BC},\vec{AB}\}$:

$\begin{vmatrix}-1&-2&2\\2&-8&2\\\dfrac{-23}{2}&-6&-4\end{vmatrix}=-222\neq0$, aleshores, els vectors $\{v,\vec{BC},\vec{AB}\}$ són L.I., per tant les rectes r, s es creuen.
c)
El vector director de la recta t, perpendicular a r i s, és igual al vector $v\times\overrightarrow{BC}$:

$$v\times\vec{BC}=\begin{vmatrix}i&j&k\\-1&-2&2\\2&-8&2\end{vmatrix}=12i+6j+12k=(12,6,12).$$

Un punt qualsevol de la recta r és $M\left(\dfrac{25}{2}-\dfrac{1}{2}\lambda,8-\lambda,\lambda\right)$.
Un punt qualsevol de la recta s és $N(1+2\mu,3-8\mu,-4+2\mu)$.
Si M i N són els punts que cerquem, aleshores el vector $\vec{MN}$ ha de ser L.D. del vector $v\times\vec{BC}=(12,6,12)$.

$$\overrightarrow{MN}=\left(1+2\mu-\frac{25}{2}+\frac{1}{2}\lambda,\ 3-8\mu-8+\lambda,\ -4+2\mu-\lambda\right).$$

$$\overrightarrow{MN}=\left(2\mu+\frac{1}{2}\lambda-\frac{23}{2},\ -8\mu+\lambda-5,\ 2\mu-\lambda-4\right).$$

Les components de $v\times\overrightarrow{BC}$ i $\dot{MN}$ són proporcionals:

$$\frac{2\mu+\frac{1}{2}\lambda-\frac{23}{2}}{12}=\frac{-8\mu+\lambda-5}{6}=\frac{2\mu-\lambda-4}{12}$$. Resolent el sistema: $\begin{cases}\mu=\frac{1}{2}\\ \lambda=5\end{cases}$.

Substituint $\mu=\frac{1}{2}$ en l'equació de la recta s la intersecció de les rectes s, t és: $P(2,-1,-3)$.

Problema 2.2. setembre 2006
En l'espai es consideren:
El pla Π que passa pels punts $(11,1,2)$, $(5,7,5)$ i $(7,-1,-2)$ i la recta r intersecció dels plans d'equacions implícites $x+y+z=15$ i $2x-7y+2z=3$.
a) Calculeu l'equació paramètrica de r i la equació implícita del pla Π.
b) Calculeu el punt P d'intersecció de r i Π i l'angle α que determinen r i Π.
c) Calculeu els punts M i N de la recta r la distància al pla Π dels quals és igual a 3 u.l.

Solució:
a)
Resolent el sistema format per l'equació implícita de la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=15 \\ 2x-y+2z=3 \end{cases}$

l'equació paramètrica de la recta r és: $r \equiv \begin{cases} x=12-\lambda \\ y=3 \\ z=\lambda \end{cases}$.

Siguen $A(11,1,2)$, $B(5,7,5)$ i $C(7,-1,-2)$.
$\vec{AB}=(-6,6,3)$, $\vec{AC}=(-4,-2,-4)$. L'equació implícita del plànol Π que passa pels punts A, B, C és:

$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-11 & y-1 & z-2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$. $\Pi \equiv 3x+6y-6z-27=0$, simplificant:
$\Pi \equiv x+2y-2z-9=0$.
b) El punt intersecció de la recta i el plànol és igual a la solució del sistema format per les seues equacions.
Si substituïm les coordenades de l'equació paramètrica de la recta r, en l'equació implícita del plànol Π:
$12-\lambda+2\cdot 3-2\lambda-9=0$. Resolent l'equació:
$\lambda=3$. Substituint aquest valor en l'equació paramètrica de la recta r. El punt d'intersecció té coordenades:
$P(9,3,3)$.
L'angle α que formen una recta i un plànol és igual a l'angle complementari de l'angle que forma el vector director de la recta i el característic o normal del plànol.
El vector característic del plànol Π és $a=(1,2,-2)$
El vector director de la recta r és $v=(-1,0,1)$.
Utilitzarem el producte escalar per calcular l'angle que formen el dos vectors:
$(-1,0,1)(1,2,-2)=\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}\cos(90^o-\alpha)$.
$-3=3\sqrt{2}\cos(90^o-\alpha)$, aleshores, $\alpha=45^o$.
c)
A partir de l'equació paramètrica de la recta r, un punt qualsevol d'aquesta és:
$Q(12-\lambda,3,\lambda)$.
Volem que $d(Q,\Pi)=3$, aleshores:

$\left|\dfrac{12-\lambda+2\cdot 3-2\lambda-9}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}\right|=3$. Simplificant:

$\left|-3\lambda+9\right|=9$. Resolent l'equació, $\lambda=0,6$. Substituint aquests valors en l'equació paramètrica del plànol les coordenades dels punts M i N que cerquem són:
$M(12,3,0)$, $N(6,3,6)$.

Problema 2.1. juny 2006

En l'espai es consideren:

La recta r intersecció de dos plans d'equacions: $x+y-z=5$ i $2x+y-2z=2$ i la recta s que passa pels punts $P(3,10,5)$ i $Q(5,12,6)$. Es demana:

a) Calculeu les equacions paramètriques de la recta r i de la recta s.

b) Calculeu el punt H intersecció de r i s i l'angle α que determinen r i s.

c) Calculeu els punts M i N de la recta r que als quals l'àrea de cadascun dels triangles de vèrtexs PQM i PQN és 3 unitats d'àrea.

Solució:

a)

Resolent el sistema format per l'equació implícita de la recta $r \equiv \begin{cases} x+y-z=5 \\ 2x+y-2z=2 \end{cases}$

l'equació paramètrica de la recta és: $r \equiv \begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=8 \\ z=\lambda \end{cases}$. El vector director és $\vec{v}=(1,0,1)$.

El vector director de s és $\vec{PQ}=(2,2,1)$, l'equació paramètrica és: $s \equiv \begin{cases} x=3+2\mu \\ y=10+2\mu \\ z=5+\mu \end{cases}$.

b)

La intersecció H de les rectes r i s és la solució del sistema que formen les dues rectes. Igualant les coordenades de les equacions paramètriques de les dues rectes:

$\begin{cases} -3+\lambda=3+2\mu \\ 8=10+2\mu \\ \lambda=5+\mu \end{cases}$. Resolent el sistema: $\begin{cases} \lambda=4 \\ \mu=-1 \end{cases}$.

Susbtituint $\lambda=5$ en l'equació paramètrica de la recta r, el punt intersecció és: $H(1,8,4)$

L'angle que formen dues rectes és l'angle que formen els seus vectors directors: Utilitzarem el producte escalar per a calcular-lo:

$(1,0,1)(2,2,1)=\sqrt{1^2+0^2+1^2}\sqrt{2^2+2^2+1^2}\cos\alpha$.

$3=3\sqrt{2}\cos\alpha$, $\alpha=45^o$.

c)

A partir de l'equació paramètrica de la recta r, les coordenades d'un punt qualsevol són: $A(-3+\lambda,8,\lambda)$.

$\vec{PA}=(-6+\lambda,-2,\lambda-5)$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQA}$ és: $S_{PQA}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PA}\right\|$. Volem que aquesta àrea siga 3.

$$\vec{PQ}\times\vec{PA}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 1 \\ -6+\lambda & -2 & \lambda-5 \end{vmatrix}=(2\lambda-8,-\lambda+4,-2\lambda+8).$$

$$\left\|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PA}\right\|^2=(2\lambda-8)^2+(-\lambda+4)^2+(-2\lambda+8)^2=9\lambda^2-72\lambda+144.$$

$\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PA}\right\|=3$. Elevant al quadrat: $9\lambda^2-72\lambda+144=36$. Resolent l'equació: $\lambda=6,2$.

Substituint els dos valors en l'equació paramètrica de r, els punts M, N que cerquem són: $M(3,8,6)$, $N(-1,8,2)$.

Problema 2.2. juny 2006

Donats els punts $A(4,-4,9)$, $B(2,0,5)$, $C(4,2,6)$, $L(1,1,4)$, $M(0,2,3)$, $N(3,0,5)$, es demana:

a) Calculeu la distància d del punt C al punt mitjà del segment d'extrems A, B i l'àrea S del triangle de vèrtexs A, B, C.

b) Calculeu les equacions implícites del pla δ que passa pels punts A, B, C i del pla δ' que passa pels punts L, M, N.

c) Calculeu l'equació paramètrica de la recta r intersecció dels plans δ, δ' i l'angle α que determinen els plans δ, δ'.

Solució:

a)

El punt mig D del segment d'extrems A, B té coordenades:

$D\left(\frac{4+2}{2},\frac{-4+0}{2},\frac{9+5}{2}\right)$. Simplificant: $D(3,-2,7)$.

$\vec{CD}=(-1,-4,1)$.

$d=d(C,D)=\left\|\overrightarrow{CD}\right\|=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+1^2}=3\sqrt{2}$.

$\vec{AB}=(-2,4,-4)$, $\vec{AC}=(0,6,-3)$, són linealment independents.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|$.

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 4 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix}=12i-6j-12k=(12,-6,-12).$$

$\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{12^2+(-6)^2+(-12)^2}=18$. Aleshores: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=9$.

b)

L'equació implícita del plànol que passa pels punts A, B, C és:

$$\delta\equiv\begin{vmatrix} x-4 & y+4 & z-9 \\ -2 & 4 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix}=0.$$ Simplificant: $\delta\equiv 2x-y-2z+6=0$

$\vec{LM}=(-1,1,-1)$, $\vec{LN}=(2,-1,1)$, són linealment independents.

L'equació implícita del plànol que passa pels punts L, M, N és:

$$\delta'\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$ Simplificant: $\delta'\equiv -y-z+5=0$

c)

La recta r té per equació implícita el sistema format per les equacions dels plànols δ, δ': $r\equiv\begin{cases} 2x-y-2z=-6 \\ y+z=5 \end{cases}$. Resolent el sistema, l'equació paramètrica de r és:

$$r\equiv\begin{cases} x=\frac{-1}{2}+\lambda \\ y=5-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}.$$

L'angle que formen els plànols δ, δ' és l'angle que formen els seus vectors característics o normals.
El vector característic del plànol δ és $a=(2,-1,-2)$. El vector característic del plànol δ' és $b=(0,-1,-1)$. Aplicant el producte escalar:

$$(2,-1,-2)(0,-1,-1)=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}\sqrt{0^2+(-1)^2+(-1)^2}\cos\alpha.$$

$$3=3\sqrt{2}\cos\alpha.\quad \alpha=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=45^o.$$

Problema 2.1. setembre 2005

Un paral·lelepípede rectangular (o ortoedre) té tres de les seues arestes sobre les rectes: $l\equiv\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$, $m\equiv\begin{cases}x-2y=0\\z=0\end{cases}$ i $n\equiv\begin{cases}2x+y=0\\z=0\end{cases}$, i un dels seus vèrtexs és $(12,21,-11)$. Es demana:

a) Trobar els vèrtexs restants.
b) Calcular el seu volum.

Solució:
a)
Les tres rectes en forma paramètrica tenen les següents expressions:

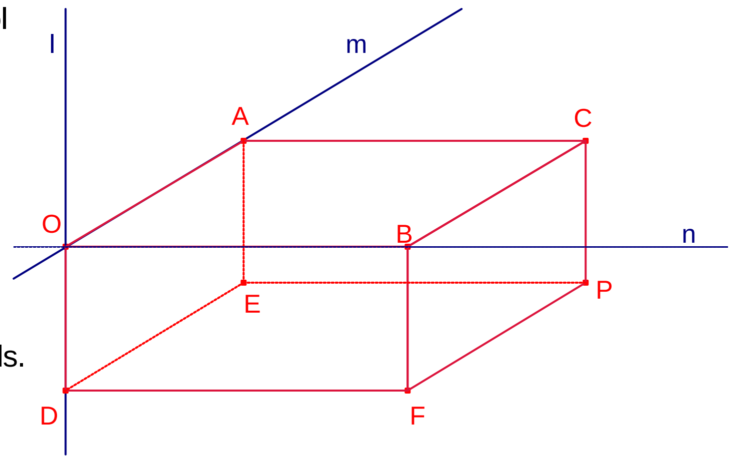
$$l\equiv\begin{cases}x=0\\y=0\\z=\alpha\end{cases}$$, el vector director és $a=(0,0,1)$.

$$m\equiv\begin{cases}x=2\beta\\y=\beta\\z=0\end{cases}$$, el vector director és $b=(2,1,0)$.

$$n\equiv\begin{cases}x=\gamma\\y=-2\gamma\\z=0\end{cases}$$, el vector director és $c=(1,-2,0)$.

Notem que els vectors directors són ortogonals (el producte escalar de dos qualsevol d'ells és zero).
Notem que el punt $P(12,21,-11)$ no pertany a cap de les rectes ja que no satisfà cap de les tres equacions.
Un altre vèrtex del paral·lelepípede és la intersecció de les tres rectes. La solució és el punt $O(0,0,0)$.

El plànol que conté les rectes l, m és el plànol que passa per O i té vector característic $c=(1,-2,0)$ (perpendicular a les rectes l, m.
La seua equació és:
$\Pi_{lm}\equiv x-2y=0$. Anàlogament:
L'equació del plànol que conté les rectes l, n té equació: $\Pi_{ln}\equiv 2x+y=0$.
L'equació del plànol que conté les rectes m, n té equació: $\Pi_{mn}\equiv z=0$.
Notem que el punt P és exterior al tres plànols.
Siga el vèrtex A sobre la recta m.
Les seues coordenades són $A(2\beta,\beta,0)$.



Siga el vèrtex B sobre la recta n.
Les seues coordenades són $B(\gamma, -2\gamma, 0)$.
El vèrtexs C sobre el plànol Π_{mn} té coordenades: $C(2\beta+\gamma, \beta-2\gamma, 0)$.
Siga D el vèrtex sobre la recta l.
Les seues coordenades són $D(0, 0, \alpha)$.
El vèrtexs E sobre el plànol Π_{lm} té coordenades: $E(2\beta, \beta, \alpha)$.
El vèrtexs F sobre el plànol Π_{ln} té coordenades: $F(\gamma, -2\gamma, \alpha)$.
El vèrtex P té coordenades: $P(2\beta+\gamma, \beta-2\gamma, \alpha)$, $P(12, 21, -11)$.

Igualant les coordenades de P: $\begin{cases} 2\beta+\gamma=12 \\ \beta-2\gamma=21 \\ \alpha=-11 \end{cases}$. Resolent el sistema: $\begin{cases} \alpha=-11 \\ \beta=9 \\ \gamma=-6 \end{cases}$.

Les coordenades dels vèrtexs de l'ortoedre són:
$O(0, 0, 0)$, $A(18, 9, 0)$, $B(-6, 12, 0)$, $C(12, 21, 0)$.
$D(0, 0, -11)$, $E(19, 8, -11)$, $F(-6, 12, -11)$, $P(12, 21, -11)$.

b)

El volum de l'ortoedre és: $V = \left|\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}\right]\right|$

$\overrightarrow{OA} = (18, 9, 0)$, $\overrightarrow{OB} = (-6, 12, 0)$, $\overrightarrow{OD} = (0, 0, -11)$.

$$\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}\right] = \begin{vmatrix} 18 & 9 & 0 \\ -6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} = -2970 .$$

$V = \left|\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}\right]\right| = 2970$.

Problema 2.2. setembre 2005

Donats els plans $\pi \equiv 5x - y - z = 0$, $\sigma \equiv x + y - z = 0$ i el punt $P(9, 4, -1)$, determineu:

a) L'equació del pla que passa pel punt P i és perpendicular a π i σ.

b) El punt simètric de P respecte de la recta r, intersecció dels plans π i σ.

Solució:

a)

Els plànols π i σ són secants ja que $\frac{5}{1} \neq \frac{-1}{1}$.

El plànol perpendicular a dos plànols π i σ que passa per P té vectors directors els vectors característics dels dos plànols π i σ.

El vector característic de π és $a = (5, -1, -1)$.

El vector característic de σ és $b = (1, 1, -1)$.

El plànol que cerquem té equació implícita:

$\Omega \equiv \begin{vmatrix} x-9 & y-4 & z+1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$. Simplificant: $\Omega \equiv x + 2y + 3z - 14 = 0$.

b)

L'equació implícita de la recta r és: $r \equiv \begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$.

El plànol Ω és perpendicular a la recta r ja que és perpendicular als plànols que la contenen. A més a més, el plànol Ω conté el punt P.

El punt projecció P_o del punt P sobre la recta r és la intersecció de la recta r i el plànol Ω.

$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \end{cases}$, la solució del sistema és: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$. El punt projecció té coordenades: $P_o(1, 2, 3)$.

El punt simètric P' del punt P respecte de la recta r compleix que $\vec{PP'} = 2 \cdot \vec{PP_0}$.

Siga $P'(x, y, z)$.

$\vec{PP'} = (x-9, y-4, z+1)$, $\vec{PP_o} = (-8, -2, 4)$.

$(x-9, y-4, z+1) = 2(-8, -2, 4)$. Igualant les components:

$\begin{cases} x - 9 = -16 \\ y - 4 = -4 \\ z + 1 = 8 \end{cases}$. Resolent el sistema $\begin{cases} x = -7 \\ y = 0 \\ z = 7 \end{cases}$.

El punt simètric el punt P respecte de la recta r té coordenades: $P'(-7, 0, 7)$.

Problema 2.1. juny 2005

Es consideren el pla $\Pi \equiv y+z-12m=0$ (m paràmetre real) i les rectes: $u \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases}$,
$v \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=2z \end{cases}$, $w \equiv \begin{cases} x=3 \\ y=3z \end{cases}$. Siguen A, B i C els punts d'intersecció de Π amb u, v, w, respectivament.

a) Calculeu les coordenades de A, B i C en funció de M.

b) Trobeu els valors de m per als quals l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és 1u.a.

Solució:

a)

El punt A és la intersecció del plànol Π amb la recta u. Resolent el sistema format per les seues equacions:

$\begin{cases} x=1 \\ y=z \\ y+z=12m \end{cases}$, la solució és: $\begin{cases} x=1 \\ y=6m \\ z=6m \end{cases}$. Les coordenades de A són: $A(1,6m,6m)$.

Anàlogament el punt B i C:

$\begin{cases} x=2 \\ y=2z \\ y+z=12m \end{cases}$, la solució és: $\begin{cases} x=2 \\ y=8m \\ z=4m \end{cases}$. Les coordenades de B són: $B(2,8m,4m)$.

$\begin{cases} x=3 \\ y=3z \\ y+z=12m \end{cases}$, la solució és: $\begin{cases} x=3 \\ y=9m \\ z=3m \end{cases}$. Les coordenades de C són: $C(3,9m,3m)$.

b)

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\| = 1$.

$\overrightarrow{AB}=(1,2m,-2m)$, $\overrightarrow{AC}=(2,3m,-3m)$.

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2m & -2m \\ 2 & 3m & -3m \end{vmatrix} = -mj-mk=(0,-m,-m)$.

$\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{0^2+(-m)^2+(-m)^2} = \sqrt{2m^2}$. Aleshores: $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\| = \frac{\sqrt{2m^2}}{2}$.

$\frac{\sqrt{2m^2}}{2}=1$. Resolent l'equació, $m=\pm\sqrt{2}$.

Problema 2.2. juny 2005

Trobeu les equacions dels plans que passen pel punt $(-7, 2, -3)$ i que les projeccions perpendiculars de l'origen sobre els esmentats plans són punts de la recta $(x, y, z) = (0, 4, 1) + t(1, 0, 0)$.

Solució:

Siga $P(-7, 2, -3)$.

Siga O_p el punt projecció de l'origen O sobre la recta $r \equiv (x, y, z) = (0, 4, 1) + t(1, 0, 0)$.

Aleshores, $O_p(t, 4, 1)$.

El vector $\vec{OO_p} = (t, 4, 1)$ és ortogonal al plànol que cerquem, aleshores és el seu vector característic.

Considerem el feix de plànol que té per vector característic $\vec{OO_p} = (t, 4, 1)$. La seua equació és:

$\Pi \equiv tx + 4y + z + D = 0$.

El punt P pertany al plànol, aleshores:

$-7t + 4 \cdot 2 - 3 + D = 0$. Resolent l'equació:

$D = -5 + 7t$. Aleshores el plànol quedaria:

$\Pi \equiv tx + 4y + z + -5 + 7t = 0$.

El punt O_p pertany al plànol, aleshores:

$t \cdot t + 4 \cdot 4 + 1 + -5 + 7t = 0$.

$t^2 + 7t + 12 = 0$. Resolent l'equació:

$t = -3, -4$.

Els plànols que compleixen les condicions del problema són:

$\Pi_1 \equiv -3x + 4y + z - 26 = 0$, $\Pi_2 \equiv -4x + 4y + z - 33 = 0$.

Problema 2.1. setembre 2004

a) Calculeu el pla que passa pel punt $P(-2, 4, -3)$ i és perpendicular a la recta $r \equiv (x, y, z) = (1, 2, 0) + t(1, -2, 1)$

b) Calculeu la distància entre el punt P i la recta r.

Solució:

a)

Un plànol i una recta són perpendiculars si el vector director de la recta és característic del plànol.

El vector director de la recta r és $\vec{v} = (1, -2, 1)$.

El feix de plànols perpendicular a la recta r té equació:

$\Pi \equiv x - 2y + z + D = 0$.

El plànol que cerquem passa pel punt $P(-2, 4, -3)$, aleshores, satisfà l'equació del plànol:

$-2 - 2 \cdot 4 - 3 + D = 0$. Resolent l'equació:

$D = 13$. L'equació del plànol que cerquem és:

$\Pi \equiv x - 2y + z + 13 = 0$.

b)

L'equació paramètrica de la recta r és: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = t \end{cases}$

La intersecció de la recta r i el plànol Π ens dóna el punt projecció P_o del punt P sobre el plànol.

Substituïm les coordenades de l'equació paramètrica de la recta r en el plànol Π:

$1 + t - 2(2 - 2t) + t + 13 = 0$. Resolent l'equació:

$t = \frac{-5}{3}$. Substituint aquest valor el l'equació de r, les coordenades del punt projecció són:

$P_o\left(\frac{-2}{3}, \frac{16}{3}, \frac{-5}{3}\right)$.

La distància del punt P a la recta és igual a la distància entre P i P_o.

$\overrightarrow{PP_o} = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$. Aleshores:

$$d(P, r) = \left\|\overrightarrow{PP_o}\right\| = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

També hauríem pogut utilitzar la fórmula de la distància $d(P, r) = \frac{\left\|\vec{v} \times \overline{PA}\right\|}{\left\|\vec{v}\right\|}$ on A és un punt qualsevol de la recta r.

Problema 2.2. setembre 2004

Considerem els punts $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $D(2,1,2)$. Es demana que:

a) Calculeu l'àrea del triangle de vèrtexs B, C i D.
b) El volum del tetraedre de vèrtexs A, B, C i D.
c) Calculeu la distància del punt A al pla que passa pels punts B, C i D.

Solució:
a)
$\vec{BC}=(0,-1,1)$, $\vec{BD}=(2,0,2)$. Els vectors són linealment independents, aleshores els punts B, C i D formen un triangle.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és $S_{BCD}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right\|$.

$$\vec{BC}\times\vec{BD}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-2i+2j+2k=(-2,2,2).$$

$\left\|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right\|=\sqrt{(-2)^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$. Aleshores: $S_{BCD}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right\|=\sqrt{3}$.

b)
$\vec{BA}=(1,-1,0)$.

El volum de tetraedre és:

$$V=\frac{1}{6}\left|\left[\vec{BA},\vec{BC},\vec{BD}\right]\right|=\left\|\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}4=\frac{2}{3}.$$

c)
L'equació del plànol que passa pels punts B, C i D té vector característic $\vec{BC}\times\vec{BD}=(-2,2,2)$.

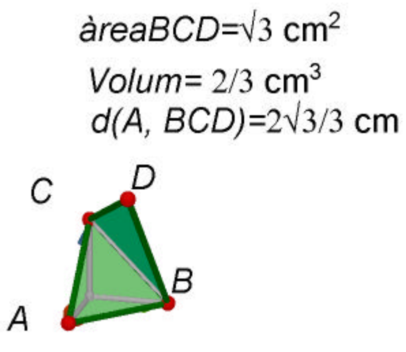
$\Pi\equiv -x+y+z+D=0$.

El punt B és del plànol, aleshores:
$1+D=0$.

Per tant, $D=-1$. Aleshores, l'equació del plànol és:
$\Pi\equiv -x+y+z-1=0$.

La distància del punt A al plànol Π és:

$$d(A,\Pi)=\left|\frac{-1+0+0-1}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}}\right|=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$



Problema 2.1. juny 2004

Donats els plans $\Pi_1 \equiv x + y + z = -5$, $\Pi_2 \equiv x - 3y - z = 3$ i la recta

$r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$.

a) Determineu raonadament la posició relativa de la recta r i la recta s intersecció dels plans Π_1 i Π_2.

b) Calculeu raonadament l'equació del pla que conté la recta s anterior i és paral·lel a r

Solució:

La recta $r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$ està en forma contínua. Un punt de la recta és $P(2,1,0)$ i el vector director $\vec{v} = (2,3,2)$.

L'equació implícita de la recta r està formada pel sistema d'equacions dels dos plànols.

$s \equiv \begin{cases} x + y + z = -5 \\ x - 3y - z = 3 \end{cases}$, resolent el sistema determinem la seua equació paramètrica:

$s \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -4 - 2\lambda \end{cases}$, un punt de la recta és: $Q(-1,0,-4)$ i el vector director $\vec{w} = (1,1,-2)$.

Els vectors $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ són linealment independents ja que les components no són proporcionals, aleshores les rectes són secants o es creuen.

$\vec{PQ} = (-3,-1,-4)$.

Estudiem la dependència lineal dels vectors $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{PQ}\}$. Calculem el determinant format pels tres vectors:

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 22 \neq 0$, aleshores, $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{PQ}\}$ són linealment independents, aleshores, les dues rectes es creuen.

b)

El plànol que conté la recta s i és paral·lela a la recta r és la que conté el punt $Q(-1,0,-4)$ de la recta s i té per vectors directors $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ directors de les dues rectes.

La seua equació implícita és:

$\Omega \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z+4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$. Simplificant, $\Omega \equiv -8x + 6y - z - 12 = 0$.

Problema 2.2. juny 2004

Tenim la recta $r \equiv (x, y, z) = (t+1, 2t, 3t)$, el pla $\Pi \equiv x - 2y - z = 0$ i el punt $P(1, 1, 1)$

a) Determineu l'equació del pla Π_1 que passa pel punt P i és paral·lel al pla Π.

b) Determineu l'equació del pla Π_2 que conté la recta r i passa pel punt P.

c) Calculeu l'equació paramètrica de la recta intersecció dels plans anteriors, Π_1 i Π_2.

Solució:

a)

Dos plànols són paral·lels si tenen els vectors característics linealment dependents i no tenen intersecció.

El feix d plànols paral·lels a Π té equació $\Pi_D \equiv x - 2y - z + D = 0$.

De tots aquest volem el que passa pel punt P, aleshores el punt P satisfà la seua equació:

$1 - 2 - 1 + D = 0$. Resolent l'equació:

$D = 2$. Aleshores, l'equació de Π_1 és:

$\Pi_1 \equiv x - 2y - z + 2 = 0$.

Notem que Π, i Π_1 són paral·lels.

b)

Notem que el punt P no pertany a la recta r ja que no satisfà la seua equació.

Un punt de la recta r és $A(1, 0, 0)$ i el vector director és $v = (1, 2, 3)$.

El plànol que conté la recta r i passa per P és el que passa pel punt P i té per vectors directors , $v = (1, 2, 3)$ i $\vec{AP} = (0, 1, 1)$ la seua equació és:

$$\Pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$. Simplificant: $\Pi_2 \equiv -x - y + z + 1 = 0$

c)

La recta s intersecció dels plànols Π_1 i Π_2 té per equació implícita el sistema format per les dues equacions dels plànols:

$$s \equiv \begin{cases} x - 2y - z + 2 = 0 \\ -x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$$, resolent el sistema, l'equació paramètrica és:

$$s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 1 \\ z = \mu \end{cases}.$$

Problema 4.1. setembre 2003

En l'espai R^3 considerem el punt $P(3, 2, 3)$ i la recta r intersecció dels plans d'equacions $x+3y-4z=0$ i $x+2y-2z=1$. Calculeu:

a) La distància d del punt P fins a la recta r.
b) Els punts M i N de la recta r que complisquen que la seua distància al punt P és $\sqrt{5}d$.
c) L'àrea del triangle de vèrtexs P, M, N.

Solució:
a)
La recta r té equació implícita $r \equiv \begin{cases} x+3y-4z=0 \\ x+2y-2z=1 \end{cases}$. Resolent el sistema, l'equació paramètrica és $r \equiv \begin{cases} x=3-2\alpha \\ y=-1+2\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$, un punt de la recta és $A(3,-1,0)$ i el vector director, $\vec{v}=(-2,2,1)$.

$\overrightarrow{PA}=(0,-3,-3)$

La distància d'un punt P a la recta r és $d(P,r)=\dfrac{\left\|\vec{v}\times\overrightarrow{PA}\right\|}{\|\vec{v}\|}$.

$$\vec{v}\times\overrightarrow{PA}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix}=-3\vec{i}-6\vec{j}+6\vec{k}=(-3,-6,6).$$

$\left\|\vec{v}\times\overrightarrow{PA}\right\|=\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+6^2}=9$, $\|\vec{v}\|=\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}=3$

$$d(P,r)=\frac{\left\|\vec{v}\times\overrightarrow{PA}\right\|}{\|\vec{v}\|}=\frac{9}{3}=3.$$

b)
Un punt qualsevol de la recta r té coordenades $Q(3-2\alpha, -1+2\alpha, \alpha)$.

$\overrightarrow{PQ}=(-2\alpha, -3+2\alpha, \alpha-3)$.

La distància de P a Q és $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|=\sqrt{5}\cdot 3$

$\sqrt{(-2\alpha)^2+(-3+2\alpha)^2+(\alpha-3)^2}=3\sqrt{5}$. Resolent l'equació: $\alpha=3,-1$.

Si $\alpha=3$ les coordenades del punt de r que compleix les condicions és: $M(-3,5,3)$.

Si $\alpha=-1$ les coordenades del punt de r que compleix les condicions és: $N(5,-3,-1)$.

c)
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PMN}$ és $S_{BCD}=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{PM}\times\overrightarrow{PN}\right\|$.

$\overrightarrow{PM}=(-6,3,0)$, $\overrightarrow{PN}=(2,-5,-4)$.

$$\overrightarrow{PM}\times\overrightarrow{PN}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & -4 \end{vmatrix}=-12\vec{i}-24\vec{j}+24\vec{k}=(-12,-24,24).$$

$\left\|\overrightarrow{PM}\times\overrightarrow{PN}\right\|=\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+24^2}=36$. Aleshores: $S_{PMN}=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{PM}\times\overrightarrow{PN}\right\|=18$.

Problema 4.2. setembre 2003

Tenim que Π i Π' són els plans de l'espai R^3, determinats de la manera següent:
El pla Π passa pels punts $(0, 2, 1)$, $(3, -1, 1)$, i $(1, -1, 5)$ i el pla Π' passa pels punts $(3, 0, 2)$, $(2, 1, 1)$, $(5, 4, -2)$. Calculeu:

a) Una equació paramètrica de la recta r intersecció dels plans Π i Π'.
b) L'angle α que formen els plans Π i Π'.
c) L'equació del pla que conté la recta r i forma 90 graus amb el pla Π.

Solució:
Siguen $A(0, 2, 1)$, $B(3, -1, 1)$, i $C(1, -1, 5)$.

$\vec{AB} = (3, -3, 0)$, $\vec{AC} = (1, -3, 4)$. Aquests vectors són linealment independents.

El plànol Π passa pel punt A i té vectors directors $\vec{AB} = (3, -3, 0)$, $\vec{AC} = (1, -3, 4)$. La seua equació implícita és:

$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z-1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0. \text{ Simplificant: } \Pi \equiv -2x - 2y - z + 5 = 0.$$

Siguen $P(3, 0, 2)$, $Q(2, 1, 1)$, $R(5, 4, -2)$.

$\vec{PQ} = (-1, 1, -1)$, $\vec{PR} = (2, 4, -4)$. Aquests vectors són linealment independents.
El plànol Π' té equació implícita:

$$\Pi' \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y & z-2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0. \text{ Simplificant: } \Pi' \equiv y + z - 2 = 0.$$

La recta r intersecció dels plànols Π i Π' té equació implícita:

$$r \equiv \begin{cases} -2x - 2y - z + 5 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

. Resolent el sistema, l'equació paramètrica de la recta r és:

$$r \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

. Un punt de la recta és $M\left(\frac{1}{2}, 2, 0\right)$ i el vector director és $\vec{v} = (1, -2, 2)$

b)
Els vectors característics dels plànols Π i Π' són $\vec{a} = (-2, -2, -1)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$, respectivament.
L'angle que formen dos plànols és igual a l'angle que formen els seus vectors característics. Aplicarem el producte escalar per calcular-lo:

$$|(-2, -2, -1)(0, 1, 1)| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2}\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}\cos\alpha.$$

$3 = 3\sqrt{2}\cos\alpha$. $\alpha = 45^o$.

c)
Dos plànols són perpendicular si el vector característic d'un d'ells és director de l'altre.

El plànol que cerquem passa pel punt $M\left(\frac{1}{2}, 2, 0\right)$ i té per vectors directors,

$\vec{v} = (1, -2, 2)$ i $\vec{a} = (-2, -2, -1)$. La seua equació vectorial és:

$$\Omega \equiv (x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 2, 0\right) + \lambda(1, -2, 2) + \mu(-2, -2, -1).$$

Problema 4.1. juny 2003

Tenim que r i r' són les rectes de l'espai R^3, determinades de la manera següent: R passa pels punts $A(3, 6, 7)$ i $B(7, 8, 3)$ i r' és la intersecció dels plans d'equacions $x-4y-z=-10$ i $3x-4y+z=-2$. Calculeu:

a) De cadascuna de les rectes r, r', una equació paramètrica i determineu la posició relativa de les dues.
b) La distància d entre les rectes r i r'.
c) L'àrea del triangle de vèrtex A, B i C, on C és un punt qualsevol de la recta r'.

Solució:
a)

$\vec{AB}=(4, 2, -4)$, L'equació paramètrica de la recta r és: $r\equiv\begin{cases}x=3+4\lambda\\ y=6+2\lambda\\ z=7-4\lambda\end{cases}$.

El vector director és $v=(4, 2, -4)$.

L'equació implícita de la recta r' és: $r'\equiv\begin{cases}x-4y-z=-10\\ 3x-4y+z=-2\end{cases}$. Resolent el sistema,

l'equació paramètrica és: $r'\equiv\begin{cases}x=-3+2\mu\\ y=\mu\\ z=7-2\mu\end{cases}$. Un punt de la recta és $P(-3, 0, 7)$ i el vector director és $w=(2,1,-2)$.

Estudiem la posició relativa de r i r':
Els vectors $\{v, w\}$ són linealment dependents ja que les components són proporcionals $\frac{4}{2}=\frac{2}{1}=\frac{-4}{-2}$, aleshores les rectes són paral·leles o coincidents.

$\vec{AP}=(-6, -6, 0)$.

Estudiem la dependència lineal dels vectors $\{v, \vec{AP}\}$.
Els vectors $\{v, \vec{AP}\}$ són linealment independents ja que les components no són proporcionals, $\frac{4}{-6}\neq\frac{2}{-6}$, aleshores, les rectes són paral·leles.

b)
La distància entre dues rectes paral·leles és igual a distància entre un punt d'una d'elles a l'altra: $d(r, r')=d(P, r)=\frac{\left\|v\times\overrightarrow{AP}\right\|}{\|v\|}$.

$$v\times\vec{AP}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 4 & 2 & -4\\ -6 & -6 & 0\end{vmatrix}=-24i+24j-12k=(-24, 24, -12).$$

$\left\|v\times\overrightarrow{AP}\right\|=\sqrt{(-24)^2+24^2+(-12)^2}=36$, $\|v\|=\sqrt{(-4)^2+2^2+(-4)^2}=6$.

$$d=d(r, r')=d(P, r)=\frac{\left\|v\times\overrightarrow{AP}\right\|}{\|v\|}=\frac{36}{6}=6.$$

c)
L'altura de qualsevol triangle de vèrtex A, B i C, on C és un punt qualsevol de la recta r' és la mateixa ja que les rectes són paral·leles.
Aquesta altura mesura la distància d de l'apartat b). Aleshores l'àrea del triangle és:

$$S_{ABC}=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot d}{2}=\frac{\sqrt{4^2+2^2+(-4)^2}\cdot 6}{2}=18.$$

Problema 4.2. juny 2003

Tenim que r és la recta i Π de R^3, determinades de la manera següent:
r passa pels punts $(2,2,4)$ i $(-1,2,1)$ i Π passa pels punts $(1,0,1)$, $(1,-1,0)$ i $(3,0,0)$.
Es demana:
a) Demostreu que la recta r no és paral·lela a Π.
b) Calculeu el punt P d'intersecció de r i Π i l'angle que formen la recta r i el pla Π.
c) Determineu els punts S i T de la recta r que complisquen que la seua distància a Π siga 4.

Solució:
a)
Siga $A(2,2,4)$ i $B(-1,2,1)$, $\overrightarrow{AB}=(-3,0,-3)$ vector director de la recta r.
L'equació vectorial de la recta r és $r\equiv(2-3\lambda,2,4-3\lambda)$.

Siga $K(1,0,1)$, $L(1,-1,0)$ i $M(3,0,0)$, $\overrightarrow{KL}=(0,-1,-1)$, $\overrightarrow{KM}=(2,0,-1)$.
L'equació del plànol que passa per K, L, M té equació implícita:

$$\Pi\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y & z-1\\ 0 & -1 & -1\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=0.$$ Simplificant: $\Pi\equiv x-2y+2z-3=0$.

Un plànol i una recta són paral·lels si el vector característic del plànol i el director de la recta són ortogonals i no tenen intersecció.
El vector característic del plànol és: $a=(1,-2,2)$.
Calculem el producte escalar del dos vectors:
$(-3,0,-3)(1,-2,2)=-9\neq 0$, els vectors no són ortogonals aleshores la recta i el plànol són secants.
b)
Resolem el sistema format per la recta i el plànol. Substituïm les coordenades de l'equació vectorial de la recta en el plànol:
$2-3\lambda-2\cdot 2+2(4-3\lambda)-3=0$. Resolent l'equació:

$\lambda=\frac{1}{3}$. Substituint en l'equació vectorial de la recta, les coordenades del punt intersecció són: $P(1,2,3)$.

L'angle α que formen una recta i un plànol és el complementari de l'angle que formen el vector director de la recta i el característic del plànol. Utilitzarem el producte escalar:

$$|(-3,0,-3)(1,-2,2)|=\sqrt{(-3)^2+0^2+3^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}\cos(90º-\alpha).$$

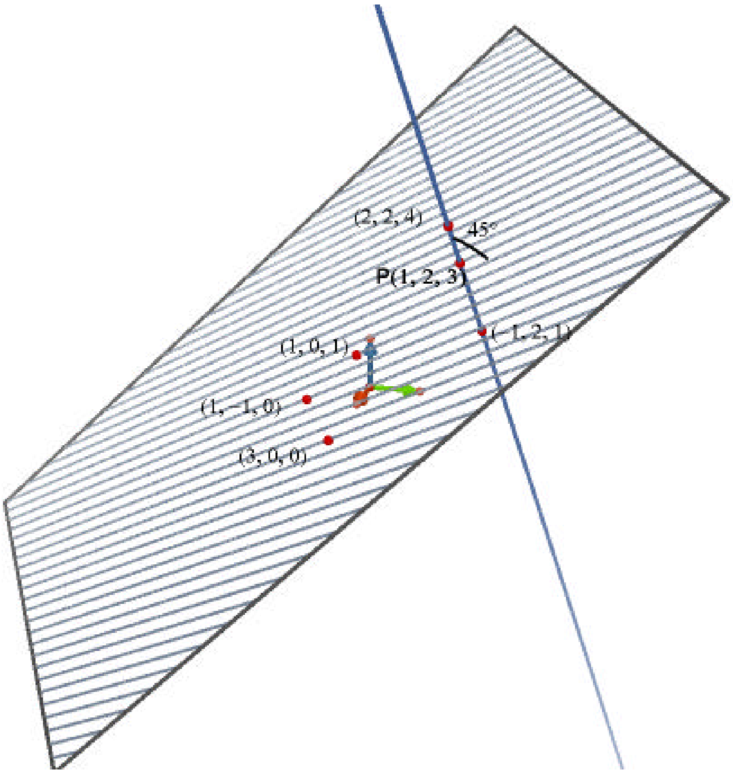
$9=9\sqrt{2}\cos(90º-\alpha)$. $\alpha=45º$.

c)
Un punt qualsevol de la recta r té coordenades: $Q(2-3\lambda,2,4-3\lambda)$, $d(Q,\Pi)=4$:

$$\left|\frac{2-3\lambda-2\cdot 2+2(4-3\lambda)-3}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}\right|=4.$$ Simplificant:

$|-9\lambda+3|=12$. Resolent l'equació: $\lambda=-1,\ \frac{5}{3}$. Substituint en l'equació vectorial de r:

Si $\lambda=-1$, $S(5,2,7)$. Si $\lambda=\frac{5}{3}$, $T(-3,2,-1)$.


(2, 2, 4)
45°
P(1, 2, 3)
(−1, 2, 1)
(1, 0, 1)
(1, −1, 0)
(3, 0, 0)