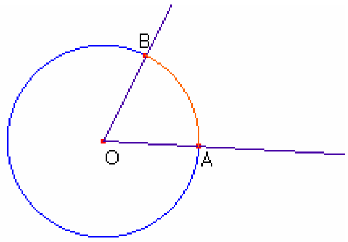
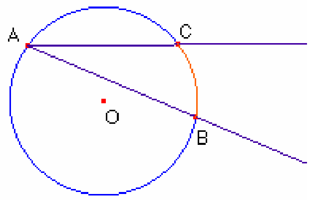
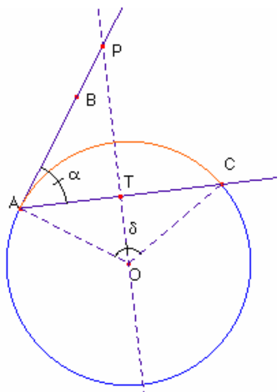
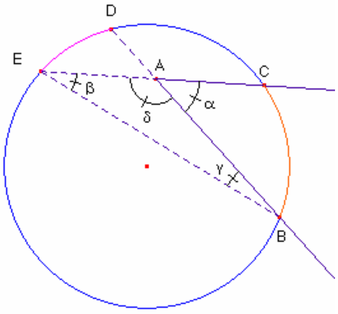
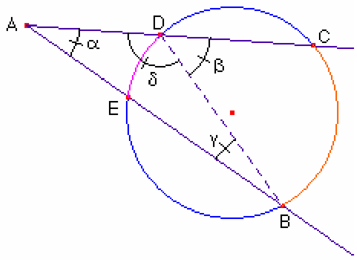
# El triangle

Ricard Peiró i Estruch

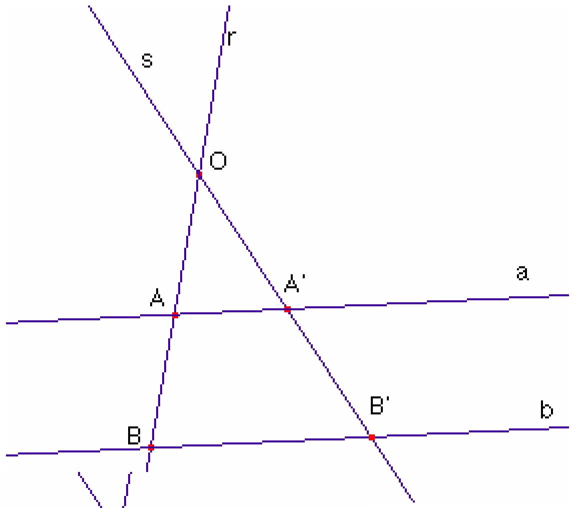
*A Anna i Ricard*

## Coneixements preliminars:

### Angles de la circumferència.

| Angle | Definició | | Mesura |
|---|---|---|---|
| Central | S'anomena **angle central** ∠AOB, l'angle el vèrtex del qual és el centre de la circumferència i els seus costats contenen radis.<br>El conjunt del punts de la circumferència interiors a l'angle s'anomena arc de la circumferència. |  | L' angle central mesura el mateix que l'arc que abraça. |
| Inscrit | S'anomena **angle inscrit** ∠BAC, l'angle el vèrtex del qual és un punt de la circumferència, i els costats són dues cordes de la mateixa. |  | L'angle inscrit d'una circumferència, mesura la meitat que l'arc que abraça. |
| Semiinscrit | S'anomena **angle semiinscrit** ∠BAC, l'angle el vèrtex del qual és un punt de la circumferència, un costat és una corda i l'altre costat és tangent a la circumferència. |  | L'angle semiinscrit mesura la meitat de l'arc de circumferència que abraça. |
| interior | S'anomena **angle interior** ∠BAC, l'angle el vèrtex del qual és un punt interior de la circumferència, i els costats són cordes de la circumferència. |  | L'angle interior mesura la semisuma dels arcs que abraça. |
| exterior | S'anomena **angle exterior** ∠BAC, l'angle el vèrtex del qual és un punt exterior a la circumferència, i els costats són cordes o rectes tangents de la circumferència. |  | L'angle exterior, mesura la semidiferència dels arcs que abraça. |

# Teorema de Tales

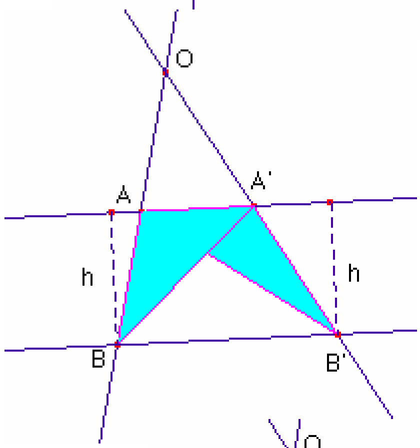



Si dues rectes secants r, s són tallades per paral· leles a, b, els segments que determinen sobre una de les secants són proporcionals als segments que determinen en l'altra secant.

a) $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{A'B'}}$

També s'acompleix:

b) $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}$ c) $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{AA'}}=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{BB'}}$

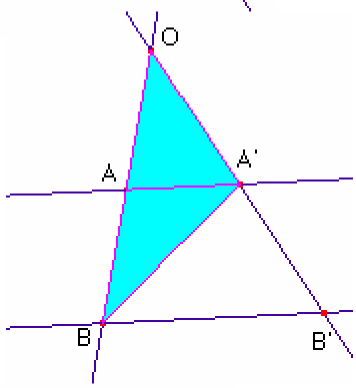



Demostració de l'apartat a) :
Dibuixem les diagonals del trapezi AA'B'B.

Notem que els triangles $\overset{\Delta}{ABA'}$, $\overset{\Delta}{AB'A'}$ tenen la mateixa àrea ja que considerant la base $\overline{AA'}$ dels dos triangles tenen la mateixa altura h ja que $\overline{AA'}$ i $\overline{BB'}$ són paral· lels.

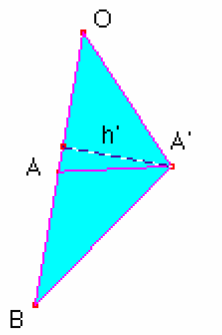
$$\text{àrea}\ \overset{\Delta}{ABA'}=\text{àrea}\ \overset{\Delta}{AB'A'}$$

Aleshores:




$$\frac{\text{àrea}\ \overset{\Delta}{OAA'}}{\text{àrea}\ \overset{\Delta}{ABA'}}=\frac{\text{àrea}\ \overset{\Delta}{OAA'}}{\text{àrea}\ \overset{\Delta}{AB'A'}} \quad (1)$$

Considerem els triangles $\overset{\Delta}{ABA'}$, $\overset{\Delta}{OAA'}$




Notem que h' és:

- L'altura del triangle $\overset{\Delta}{ABA'}$ sobre el costat $\overline{AB}$.
- L'altura del triangle $\overset{\Delta}{OAA'}$ sobre el costat $\overline{OB}$.

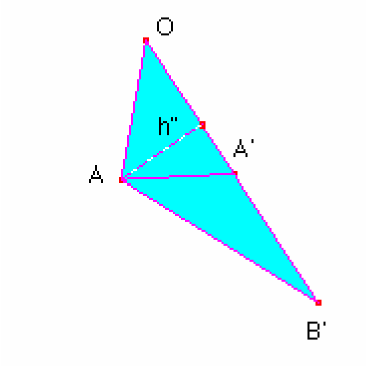
Aleshores:

$$\text{àrea}\ \overset{\Delta}{OAA'}=\frac{\overline{OA}\cdot h'}{2} \qquad \text{àrea}\ \overset{\Delta}{ABA'}=\frac{\overline{AB}\cdot h'}{2}$$

Per tant, $\dfrac{\text{àrea}\ \overset{\Delta}{OAA'}}{\text{àrea}\ \overset{\Delta}{ABA'}}=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{AB}}$

Anàlogament demostraríem que:

$$\frac{\text{àrea } \overset{\Delta}{OAA'}}{\text{àrea } \overset{\Delta}{AB'A'}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'B'}}$$

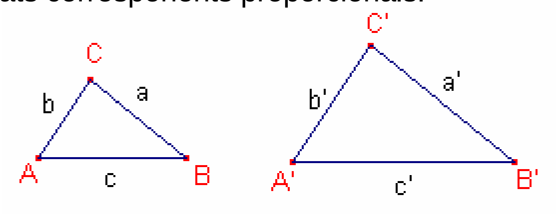



L'expressió (1) quedaria: $\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{A'B'}}$

## Triangles semblants.

Dos triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ són semblants (ho representarem per $\overset{\Delta}{ABC} \approx \overset{\Delta}{A'B'C'}$) si tenen els costats corresponents iguals i els costats corresponents proporcionals.

És a dir, $A = A', B = B', C = C'$ i $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$




## Criteris de semblança de triangles.

Siguen els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{A'B'C'}$

### Criteri 1.

Si $\hat{A} = \hat{A}'$, $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$, aleshores, $\overset{\Delta}{ABC} \approx \overset{\Delta}{A'B'C'}$

És a dir, dos triangles són semblants si tenen un angle igual i els costats corresponents que formen l'angle proporcionals.

### Criteri 2.

Si $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, aleshores, $\overset{\Delta}{ABC} \approx \overset{\Delta}{A'B'C'}$

És a dir, dos triangles són semblants si tenen dos angles corresponents iguals.

### Criteri 3.

És a dir, dos triangles són semblants si tenen els tres costats corresponents proporcionals.

# Quadrilàters cíclics.

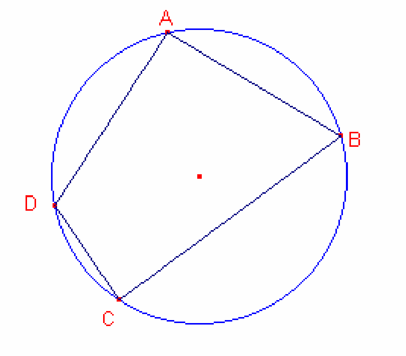
Una quadrilàter és cíclic si es pot inscriure en una circumferència.

Propietat:
Un quadrilàter és cíclic (inscriptible en una circumferència) si i només si els seus angles oposats sumen 180º

Condició necessària.

Siga un quadrilàter cíclic ABCD.
Els arcs dels angles $\angle BAD$, $\angle BCD$ formen la circumferència.
Per ser angles inscrits mesuren la meitat dels arcs que abracen.

Per tant, la suma els angles és $\angle BAD + \angle BCD = \dfrac{360^{\circ}}{2}$

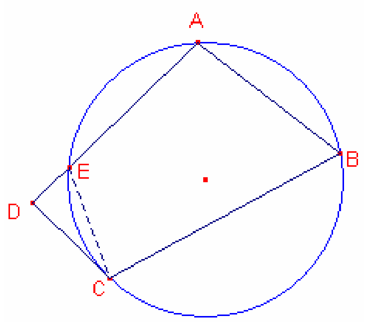



Condició suficient.
Suposem que el quadrilàter ABCD la suma dels angles oposats és 180º.
$\angle CDA + \angle ABC = 180^{\circ}$

Considerem la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
Provarem que C pertany a la circumferència circumscrita.

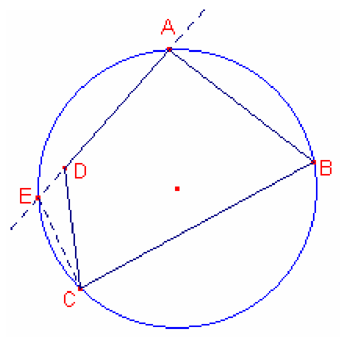
Suposem que D està en l'exterior de la circumferència
Aleshores el segment $\overline{AD}$, o el segment $\overline{CD}$ talla la circumferència en un punt distint de D.

Suposem que el costat $\overline{AD}$ talla la circumferència en el punt E.
El quadrilàter ABCE és cíclic aleshores,
$\angle CEA + \angle ABC = 180^{\circ}$



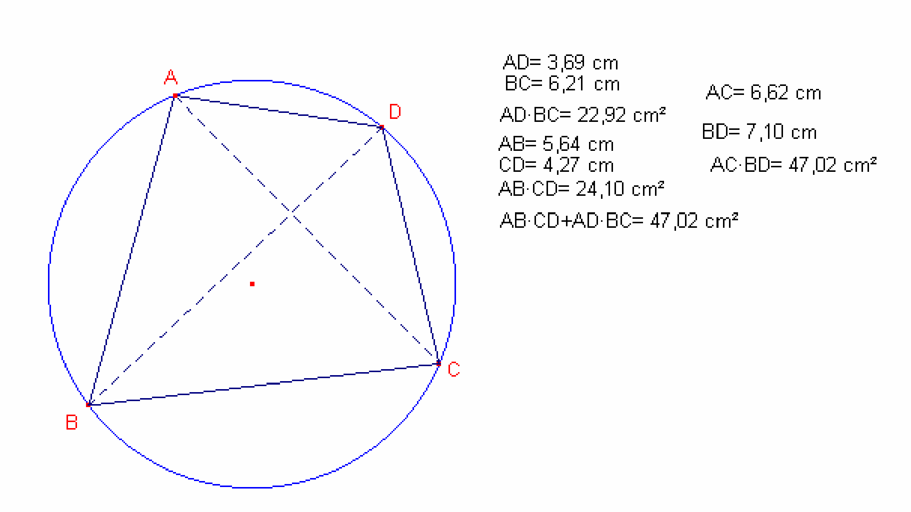

Aleshores $\angle CEA = \angle CDA$, per tant els segments $\overline{CE}, \overline{CD}$ són paral· lels, la qual cosa és absurda.
Per tant D pertany a la circumferència.

Suposem que D està en l'interior de la circumferència.
Considerem la recta que passa pels punts A, D.
Aquesta recta talla la circumferència en el punt E.
El quadrilàter ABCE és cíclic aleshores,
$\angle CEA + \angle ABC = 180^{\circ}$
Aleshores $\angle CEA = \angle CDA$, per tant els segments $\overline{CE}, \overline{CD}$ són paral· lels, la qual cosa és absurda.
Per tant D pertany a la circumferència.

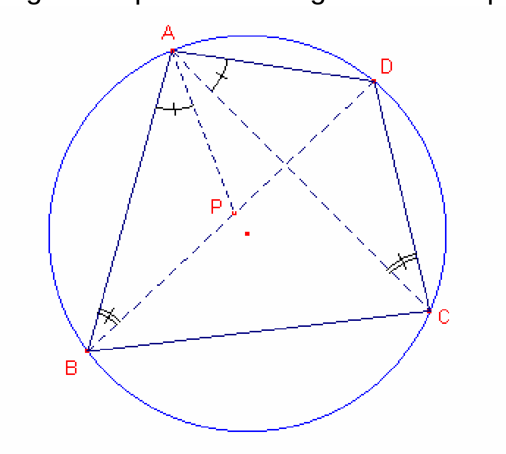


## Teorema de Ptolomeu.

Un quadrilàter ABCD és cíclic (inscrit en una circumferència) si i només si la suma dels productes dels costats oposats és igual al producte de les diagonals $\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$.




Condició necessària:
Suposem, sense restar generalitat, que $\angle BAD \geq \angle ABD$
Siga P un punt de la diagonal BD tal que $\angle BAP=\angle CAD$




Els triangles $\overset{\Delta}{BAP}$, $\overset{\Delta}{CAD}$ són semblants ja que $\angle ABP=\angle ACD$, i $\angle BAP=\angle CAD$, aleshores,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BP}}{\overline{CD}},\text{ per tant, }\quad \overline{AB}\cdot\overline{CD}=\overline{AC}\cdot\overline{BP}\qquad (1)$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{APD}$ són semblants ja que,
$\angle BAC=\angle BAP+\angle PAC=\angle DAC+\angle PAC=\angle PAD$, i $\angle ACB=\angle ADP$, aleshores,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{PD}},\text{ per tant, }\quad \overline{BC}\cdot\overline{AD}=\overline{AC}\cdot\overline{PD}\qquad (2)$$

Sumant les expressions (1), (2)

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\left(\overline{BP}+\overline{PD}\right)=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$$

Condició suficient:
Siga un quadrilàter ABCD que satisfà la igualtat $\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$

Siga un punt P’ tal que $\angle BAP'=\angle CAD$, $\angle ABP'=\angle ACD$

Els triangles $B\overset{\Delta}{A}P'$, $C\overset{\Delta}{A}D$ són semblants
$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BP'}}{\overline{CD}}$, per tant, $\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\overline{AC}\cdot\overline{BP'}$ (3)

Els triangles $A\overset{\Delta}{B}C$, $A\overset{\Delta}{P'}D$ són semblants
$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{P'D}}$, per tant, $\overline{BC}\cdot\overline{AD}=\overline{AC}\cdot\overline{P'D}$ (4)

Sumant les expressions (3), (4)

$\overline{AC}\left(\overline{BP'}+\overline{P'D}\right)=\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}$
Per hipòtesi $\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$

Aleshores:
$\overline{BP'}+\overline{P'D}=\overline{BD}$, per tant P’ pertany a la diagonal $\overline{BD}$

$\angle ABD=\angle ABP'=\angle ACD$, per tant C pertany a la circumferència circumscrita al triangle $A\overset{\Delta}{B}D$.

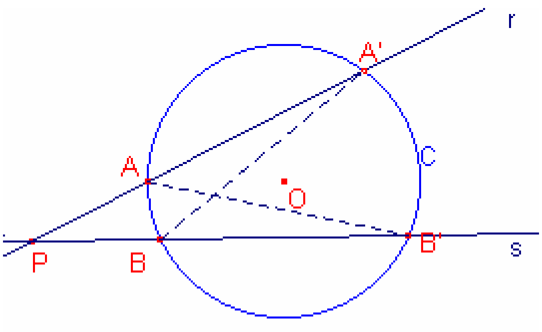
# Potència d'un punt respecte d'una circumferència.

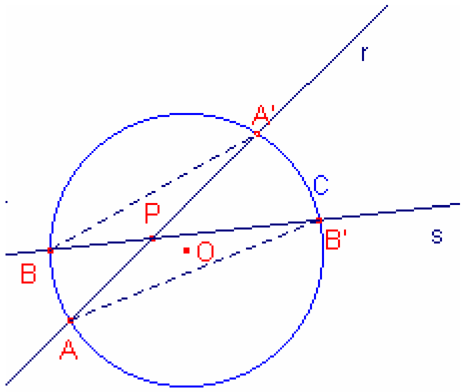
Teorema:
Siga la circumferència C de centre O. Siga P un punt qualsevol del plànol.
Siga la recta r que passa pel punt P, que talla la circumferència C en els punts A, A'.
Siga la recta s que passa pel punt P, que talla la circumferència C en els punts B, B'.

Aleshores: $\overline{PA}\cdot\overline{PA'}=\overline{PB}\cdot\overline{PB'}=k$, a aquesta constant s'anomena **potència del punt P respecte de la circumferència C.**

Si P és exterior a la circumferència C tenim que: $k=d^2-r^2$, on $d=\overline{PO}$, $r=\text{radi}$ de la circumferència.
Si P és interior a la circumferència C tenim que: $k=r^2-d^2$.

Demostració:

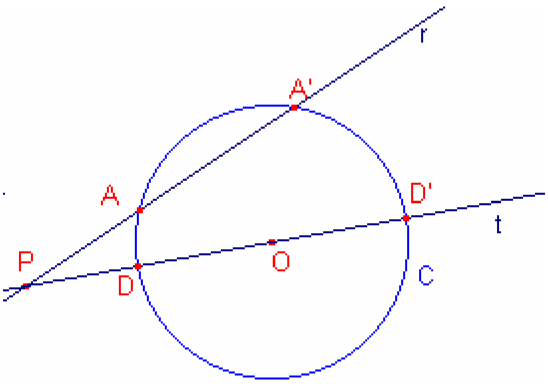



En les dues figures, els triangles $P\overset{\Delta}{A}B', P\overset{\Delta}{B}A'$ són semblants, aleshores:

$\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PA}}=\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PB}}$ per tant, $\overline{PA}\cdot\overline{PA'}=\overline{PB}\cdot\overline{PB'}$

Si P és exterior a la circumferència:




Considerem la recta t que passa pels punts P, O, que talla la circumferència C en els punts D, D'. Per la propietat anterior: $\overline{PA}\cdot\overline{PA'}=\overline{PD}\cdot\overline{PD'}$

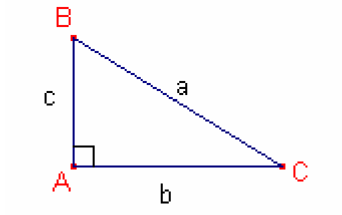
Siguen: $\overline{PO}=d$, $\overline{OD}=r$

$\overline{PD}\cdot\overline{PD'}=\left(\overline{PO}-\overline{OD}\right)\cdot\left(\overline{PO}+\overline{OD'}\right)=(d-r)\cdot(d+r)=d^2-r^2$,

Aleshores, $\overline{PA}\cdot\overline{PA'}=d^2-r^2$

Anàlogament si P és interior a la circumferència $k=r^2-d^2$

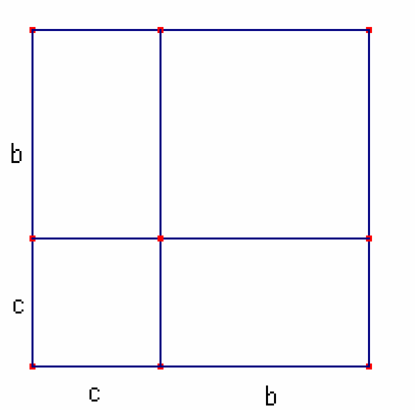
# Teorema de Pitàgores




Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $\hat{A} = 90^{o}$
d'hipotenusa a i catets b, c
Aleshores, $a^2 = b^2 + c^2$

Demostració:

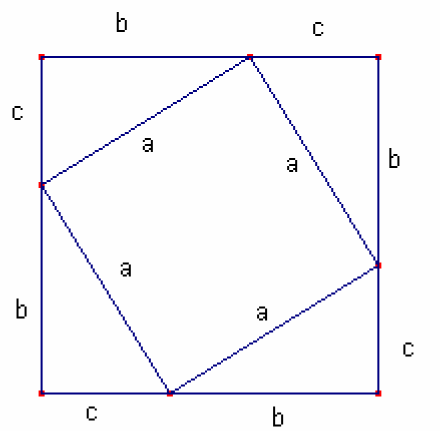
Considerem els 2 quadrats següents : de costat $b + c$ .




Els dos quadrats són iguals, per tant, tenen la mateixa àrea.

El primer quadrat la seua àrea és:

$$S = (b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc$$




El segon quadrat l'hem descompost en 4 triangles rectangles iguals i de catets b, c i hipotenusa a, i un quadrat de costat a. La seua àrea és la suma de les àrees dels 4 triangles i la del quadrat,

$$S = 4\left(\frac{bc}{2}\right) + a^2$$

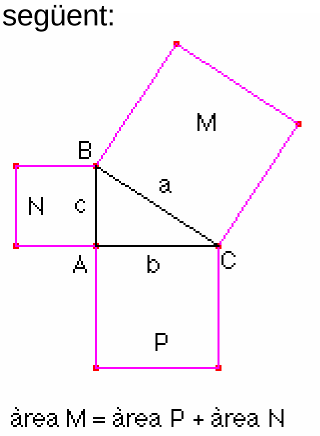
Igualant les àrees,

$$b^2 + c^2 + 2bc = 4\left(\frac{bc}{2}\right) + a^2$$

Simplificant podem concloure que, $a^2 = b^2 + c^2$

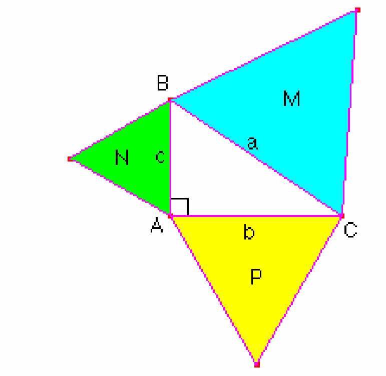
El teorema de Pitàgores també es pot enunciar de la forma següent:
El quadrat construït sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle té la mateixa àrea que la suma de les àrees dels quadrats construïts sobre els catets:

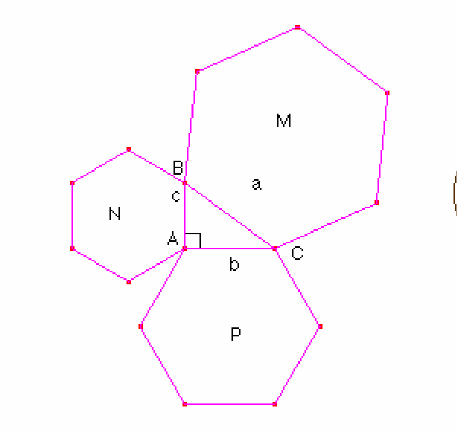
$$\text{àreaM} = a^2$$
$$\text{àreaP} = b^2$$
$$\text{àreaN} = c^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2$$

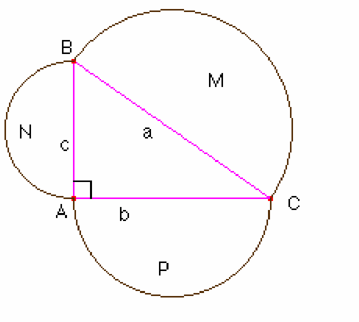


**Generalització del teorema de Pitàgores:**

L'àrea de la figura construïda sobre la hipotenusa és la mateixa que la suma de les àrees de les figures semblants construïdes sobre els catets.



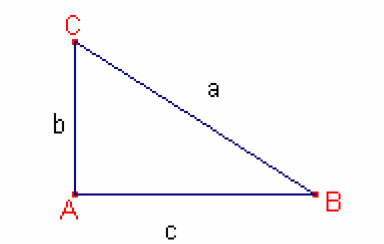

$$\text{àrea M} = \text{àrea N} + \text{àrea P}$$

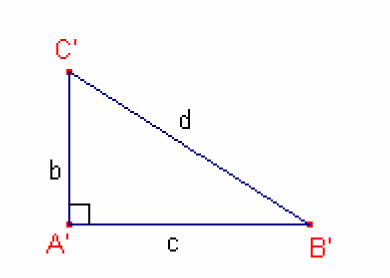
**Teorema invers del teorema de Pitàgores:**

Siga un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que $a^2 = b^2 + c^2$

Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle i l'angle $\angle BAC = 90°$

Demostració:




Construïm el triangle rectangle $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ de catets b, c que tindrà hipotenusa d
Pel teorema de Pitàgores: $d^2 = b^2 + c^2$
Per hipòtesi $a^2 = b^2 + c^2$
Aleshores, $a = d$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ tenen els costats corresponents iguals per tant són iguals.
Alehsores $\angle BAC = \angle B'A'C' = 90°$

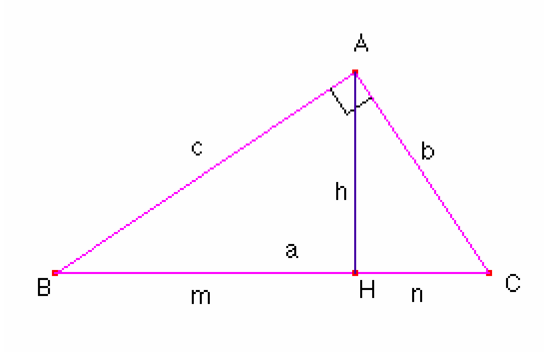
## Teorema de l'altura i del catet en un triangle rectangle.

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $\hat{A} = 90^{\circ}$

Siga l'altura $h = \overline{AH}$ sobre la hipotenusa.

Siga $m = \overline{BH}$ la projecció del catet c sobre la hipotenusa.

Siga $n = \overline{HC}$ la projecció del catet b sobre la hipotenusa.




Aleshores,

a) $h^2 = m \cdot n$ **Teorema de l'altura.**

b) $b^2 = n \cdot a$ **Teorema del catet.**

c) $c^2 = m \cdot a$ **Teorema del catet.**

Demostració:

a)

Els triangles $\overset{\Delta}{ABH}$ i $\overset{\Delta}{ACH}$ són semblants, aleshores,

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{HC}} \Rightarrow \frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Rightarrow h^2 = m \cdot n$$

b)

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$ i $\overset{\Delta}{ACH}$ són semblants, aleshores,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{HC}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{n}{b} \Rightarrow b^2 = n \cdot a$$

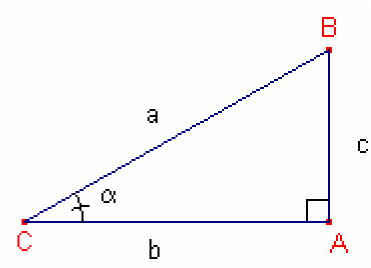
c)

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$ i $\overset{\Delta}{ABH}$ són semblants, aleshores,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{m}{c} \Rightarrow c^2 = m \cdot a$$

**Nota:** Sumant les igualtats b) i c) ens dóna una demostració del teorema de Pitàgores.

# Raons trigonomètriques d'un angle agut.




Considerarem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ on $A = 90º$

Recordem que en qualsevol triangle rectangle es complia el teorema de Pitàgores:

$a^2 = b^2 + c^2$

Siga $\alpha = \angle BCA$

Definim sinus de l'angle $\alpha$ i ho representem per $\sin\alpha$

$$\sin\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}}$$

Definim cosinus de l'angle $\alpha$ i ho representem per $\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\text{catet contigu}}{\text{hipotenusa}}$$

Definim tangent de l'angle $\alpha$ i ho representem per $\text{tg}\,\alpha$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{CA}} = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet contigu}}$$

Nota: Pel teorema de Tales, les raons trigonomètriques de l'angle $\alpha$ no depenen del triangle rectangle escollit.

**Relacions fonamentals entre les raons trigonomètriques.**

Donat un angle $\alpha$ es compleixen les següents relacions:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

## Raons trigonomètriques dels angles $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\text{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{1 - \text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\text{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta}{1 + \text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta}$$

## Raons trigonomètriques de l'angle doble. $2\alpha$.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\text{tg}2\alpha = \frac{2\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}$$

## Raons trigonomètriques de l'angle meitat $\frac{\alpha}{2}$.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

**Nota**: El signe de les raons trigonomètriques de l'angle meitat depenen del quadrant on es trobe l'angle $\frac{\alpha}{2}$

## Transformacions de sumes de cosinus (sinus) en productes.

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$
$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

## Transformacions de productes de cosinus-sinus en sumes i diferències.

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$$
$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{-1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right)$$
$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$
$$\cos\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right)$$

## Teorema dels sinus

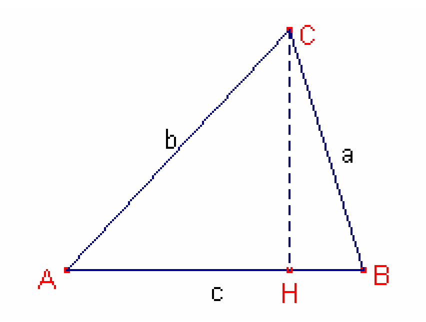
Els costats d'un triangle són proporcionals als sinus dels angles oposats:

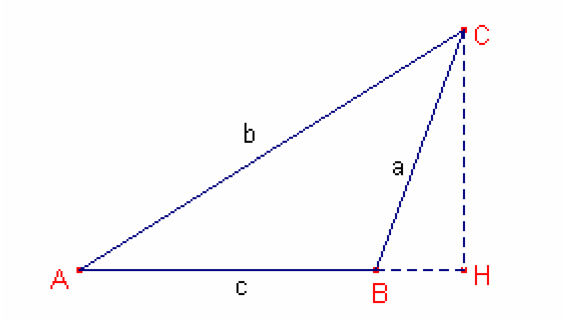
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Demostració:

Considerem qualssevol dels triangles $\overset{\Delta}{ABC}$.

Tracem als triangles $\overset{\Delta}{ABC}$ l'altura corresponent al vèrtex C.






$$\begin{cases} \overline{HC} = b \cdot \sin A \\ \overline{HC} = a \cdot \sin B \end{cases} \Rightarrow \quad b \cdot \sin A = a \cdot \sin B \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

Anàlogament si tracem l'altura corresponent al vèrtex A obtindríem:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

## Teorema del cosinus.

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Es compleixen les següents igualtats.

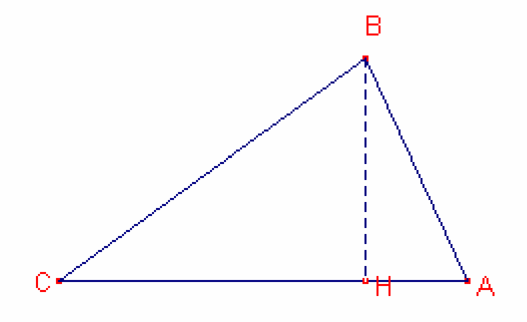
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

Demostració:

Considerarem tres casos:
1.- L'angle A recte.
2.- L'angle A agut.
3.- L'angle A obtús.

1.- És l'enunciat del teorema de Pitàgores.

2.-




Tracem al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ l'altura corresponent al vèrtex B.

El triangle $\overset{\Delta}{CHB}$ és rectangle.
Pel teorema de Pitàgores,

$$a^2 = \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 = \overline{BH}^2 + \left(b - \overline{HA}\right)^2 = \overline{BH}^2 + b^2 + \overline{HA}^2 - 2b \cdot \overline{HA} \quad (1)$$

El triangle $\overset{\Delta}{HAB}$ és rectangle.

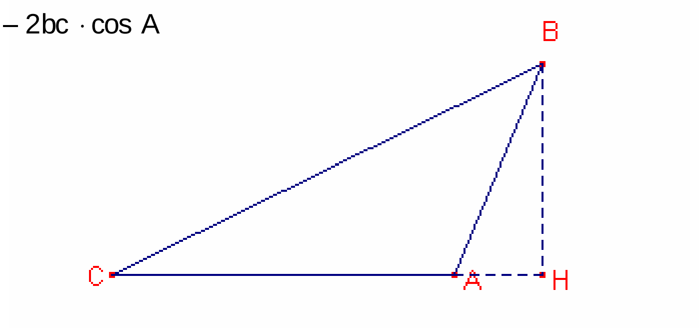
Pel teorema de Pitàgores $\overline{BA}^2 + \overline{HA}^2 = c^2$

$$\cos A = \frac{\overline{HA}}{c} \quad \Rightarrow \quad \overline{HA} = c \cdot \cos A$$

Substituint en (1)

$$a^2 = \overline{BH}^2 + b^2 + \overline{HA}^2 - 2b \cdot \overline{HA} = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

3.-




Tracem al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ l'altura corresponent al vèrtex B.

El triangle $\overset{\Delta}{CHB}$ és rectangle.

Pel teorema de Pitàgores:

$$a^2 = \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 = \overline{BH}^2 + \left(b + \overline{HA}\right)^2 = \overline{BH}^2 + b^2 + \overline{HA}^2 + 2b \cdot \overline{HA} \quad (1)$$

El triangle $\overset{\Delta}{HAB}$ és rectangle.

Pel teorema de Pitàgores $\overline{BA}^2 + \overline{HA}^2 = c^2$

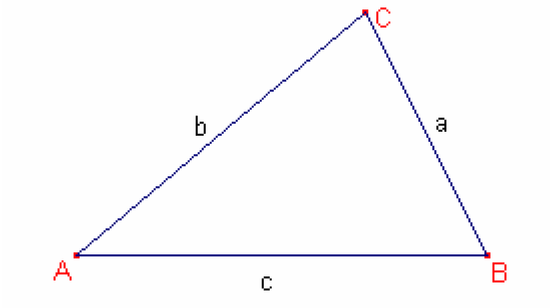
$$\cos(180º - A) = \frac{\overline{HA}}{c} \quad \Rightarrow \quad \overline{HA} = -c \cdot \cos A$$

Substituint en (1)

$$a^2 = \overline{BH}^2 + b^2 + \overline{HA}^2 + 2b \cdot \overline{HA} = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

Anàlogament es demostren les altres dues igualtats de l'enunciat del teorema.

# Teorema de la tangent (Viète)




Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Aleshores, $\dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{A+B}{2}}{\mathrm{tg}\dfrac{A-B}{2}}=\dfrac{a+b}{a-b}$

Demostració:

Utilitzarem el teorema dels sinus $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ i les transformacions de productes en sumes:

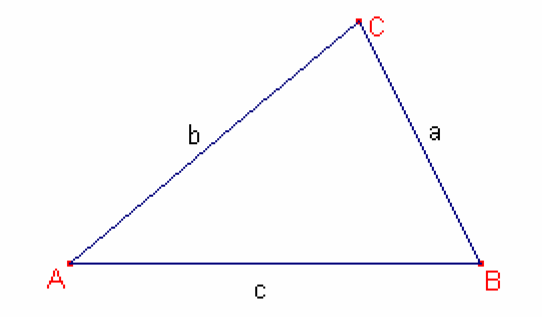
$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$
$$\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right)$$

$$\frac{\mathrm{tg}\dfrac{A+B}{2}}{\mathrm{tg}\dfrac{A-B}{2}}=\frac{\sin\dfrac{A+B}{2}\cdot\cos\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{A+B}{2}\cdot\sin\dfrac{A-B}{2}}=$$
$$=\frac{\dfrac{1}{2}\left(\sin A+\sin B\right)}{\dfrac{1}{2}\left(\sin A-\sin B\right)}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=$$
$$=\frac{\dfrac{a\cdot\sin B}{b}+\sin B}{\dfrac{a\cdot\sin B}{b}-\sin B}=\frac{a+b}{a-b}$$

# TRIANGLES.

Un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és la figura geomètrica del plànol formada per 3 segments anomenats costats els extrems dels quals es tallen 2 a 2 en 3 punts anomenats vèrtexs.

Els vèrtexs s'escriuen en lletres majúscules i el costat oposat al vèrtex en la mateixa lletra minúscula.




## Igualtat de triangles:

Dos triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ són iguals si els costats i els angles corresponents són iguals.

### Criteris d'igualtat de triangles.

Criteri 1.

Dos triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ són iguals si $\hat{A} = \hat{A}'$, $b = b'$, $c = c'$, és a dir,
dos triangles són iguals si tenen iguals dos costats i l'angle comprés entre ells.

Criteri 2.

Dos triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ són iguals si $c = c'$, $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, és a dir,
dos triangles són iguals si tenen igual un costat i els angles continguts.

Criteri 3.

Dos triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ són iguals si $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, és a dir,
dos triangles són iguals si tenen els costats corresponents són iguals.

Criteri 4.

Dos triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ són iguals si $a = a'$, $b = b'$, $a > b$, $\hat{A} = \hat{A}'$, és a dir,
dos triangles són iguals si tenen dos costats iguals i iguals l'angle oposats al major d'ells.

## Classificació dels triangles:

Segons els costats:

- **Equilàter**: Té els 3 costats són iguals.
- **Isòsceles**: Té 2 costats iguals.
- **Escalè**: Té els tres costats desiguals.

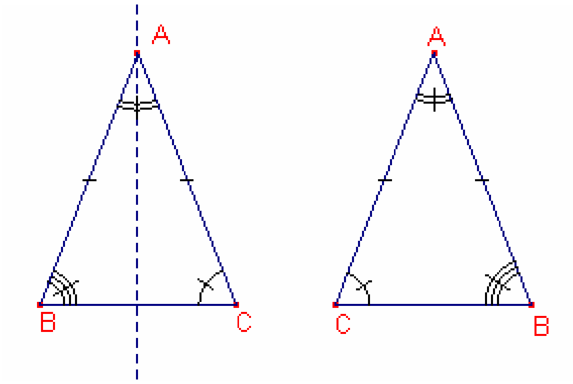
Segons els angles:

- **Acutangle**: Té els 3 angles aguts.
- **Rectangle**: Té un angle recte i els altres aguts.
- **Obtusangle**: Té un angle obtús i els altres aguts.

# Propietats

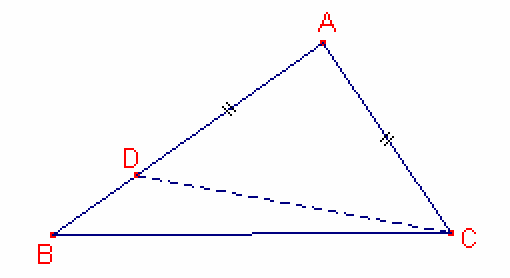
a) Si un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ té dos costats iguals $\overline{AB} = \overline{AC}$, els seus angles oposats són iguals.

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i el triangle $\overset{\Delta}{ACB}$ que resulta de la simetria del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ respecte de la bisectriu de l'angle $\angle BAC$.
Els dos triangles tenen dos costats iguals i l'angle que formen igual. Per tant són iguals, aleshores $\angle ABC = \angle ACB$.




b) En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, a major costat s'oposa major angle.
Hem de provar que si $\overline{AB} > \overline{AC}$, aleshores $\hat{C} > \hat{B}$.

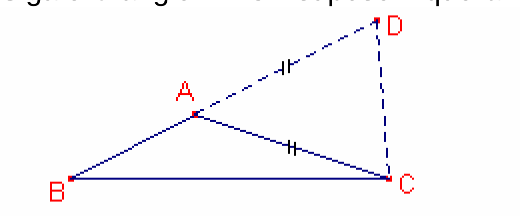
Siga El punt D sobre el costat $\overline{AB}$ tal que $\overline{AC} = \overline{AD}$.




Com el triangle $\overset{\Delta}{ADC}$ és isòsceles $\angle ADC = \angle ACD$
Com $\hat{C} > \angle ACD$ i $\angle ADC > \hat{B}$, aleshores, $\hat{C} > \hat{B}$.

## 1.- La suma de dos costats és major que l'altre costat.

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i suposem que $a = \overline{BC}$ és el costat major.




Hem de provar que $\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{AC}$
Prolonguem el costat $\overline{AB}$ i en la prolongació construïm el segment $\overline{AD}$, tal que $\overline{AC} = \overline{AD}$ (el triangle $\overset{\Delta}{ADC}$ és isòsceles), aleshores $\angle ACD = \angle ADC$.

$\angle BCD > \angle ACD = \angle ADC$
Com que l'angle major s'oposa major angle, temin que:
$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC} > \overline{BC}$

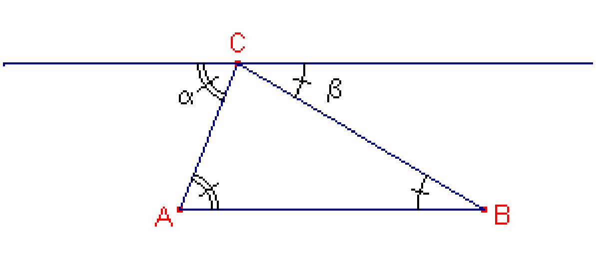
## 2.- La suma dels angles d'un triangle mesura 180º.

Considerem la recta paral· lela al costa $\overline{AB}$ que passa per C

Aleshores $\alpha + \hat{C} + \beta = 180^{o}$

$\hat{A} = \alpha$, $\hat{B} = \beta$, per ser angles alterns-interns sobre costats paral· lels.

Per tant, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^{o}$

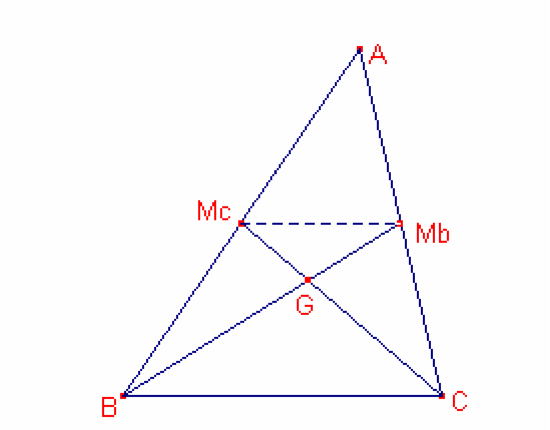



# ALTRES ELEMENTS D'UN TRIANGLE:

## Mitjanes i baricentre.

La **mitjana**: És el segment que uneix un vèrtex i el punt mig del costat oposat al vèrtex.

Propietat:
Les 3 mitjanes d'un triangle es creuen en un punt G anomenat **baricentre** o centre de gravetat del triangle.




Siguen les mitjanes $\overline{BM_b}, \overline{CM_c}$ que es tallen en el punt G.

$\overline{M_bM_c}$ és la paral· lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Aleshores els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{AM_bM_c}$ són semblants i $\overline{M_bM_c} = \dfrac{a}{2}$

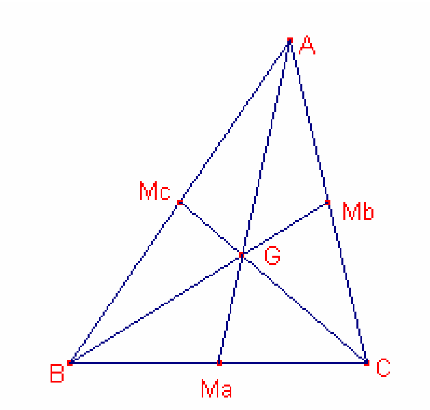
Els triangles $\overset{\Delta}{GM_bM_c}$ , $\overset{\Delta}{GBC}$ són semblants i la raó de semblança és $\dfrac{1}{2}$

Aleshores $\overline{BG} = 2 \cdot \overline{GM_b}$ , $\overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM_c}$ , o bé, $\overline{BM_b} = 3 \cdot \overline{GM_b}$ , $\overline{CM_c} = 3 \cdot \overline{GM_c}$
Aleshores

Siga G' el punt d'intersecció de les mitjanes corresponents als vèrtexs A i B
$\overline{BM_b} = 3 \cdot \overline{G'M_b}$ , $\overline{AM_a} = 3 \cdot \overline{G'M_a}$

$\overline{GM_b} = \overline{G'M_b}$ , aleshores G=G'

## Propietat del baricentre d'un triangle:




Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Siga G el baricentre del triangle, aleshores
$\overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM_c}$, $\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM_A}$, $\overline{BG} = 2 \cdot \overline{GM_B}$

El baricentre d'un triangle està a doble distància del vèrtex que del punt mig del costat oposat.

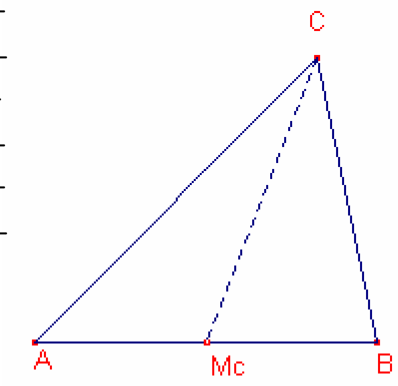
Demostració: veure el teorema anterior.

## Propietat: la mesura de les mitjanes:

La mitjana sobre el vèrtex A mesura $m_A = \dfrac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$

La mitjana sobre el vèrtex B mesura $m_B = \dfrac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2}$

La mitjana sobre el vèrtex C mesura $m_C = \dfrac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$




Demostració:

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \quad \Rightarrow \quad -2bc \cdot \cos A = a^2 - b^2 - c^2 \quad (1)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AM_C C}$

$$m_C^2 = b^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - bc \cdot \cos A \quad \Rightarrow \quad -2bc \cdot \cos A = 2m_C^2 - 2b^2 - \frac{c^2}{2} \quad (2)$$

Igualant les expressions (1) i (2)

$$a^2 - b^2 - c^2 = 2m_C^2 - 2b^2 - \frac{c^2}{2} \quad \Rightarrow \quad m_C^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$$

Aleshores, $m_C = \dfrac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$

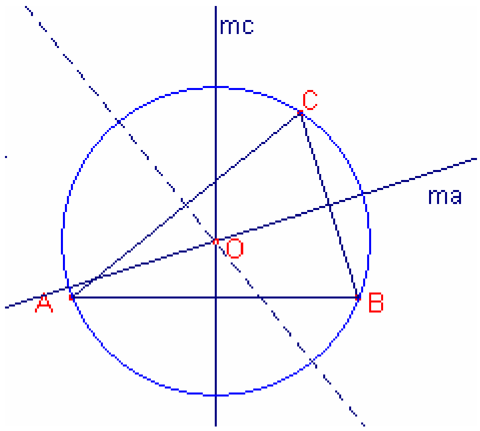
Anàlogament, demostraríem la mesura de les altres mitjanes.

# Mediatrius i circumcentre.

La **mediatriu**: és la recta que passa pel punt mig de cada costat i és perpendicular al costat.

## Propietat:

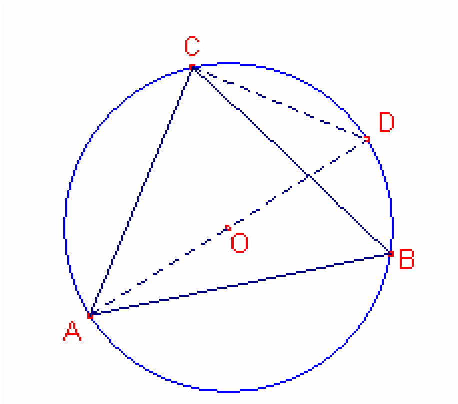
Les 3 mediatrius d'un triangle es creuen en un punt que s'anomena **circumcentre**, que té la propietat de ser el centre de la circumferència circumscrita al triangle.




Demostració:
Siguen $m_a, m_c$ les mediatrius que es tallen en el punt O, aleshores:
$\overline{OB} = \overline{OC}, \quad \overline{OA} = \overline{OB}$
Per tant, $\overline{OA} = \overline{OC}$, és a dir, O pertany a la mediatriu del segment $\overline{AC}$.
També O equidista dels vèrtexs A, B, C, aleshores, és el centre de la circumferència que passa pels tres vèrtexs.

## Càlcul del diàmetre del cercle circumscrit a un triangle.

El diàmetre de la circumferència circumscrita és igual a la constant de la proporció del teorema dels sinus.




Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Considerem el cercle circumscrit al triangle.

Tracem el diàmetre $\overline{AD}$ i la corda $\overline{DC}$.

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ADC}$.

Per ser B, D angles inscrits a la circumferència, i abracen el mateix arc tenim que $B = D$.

Siga l'angle $\alpha = \angle ACD$.
L'angle $\alpha = 90^{\circ}$, perquè un angle inscrit en la circumferència mesura la meitat de l'arc que abraça.

Per tant, $b = \overline{AD} \cdot \sin D = \overline{AD} \cdot \sin B$

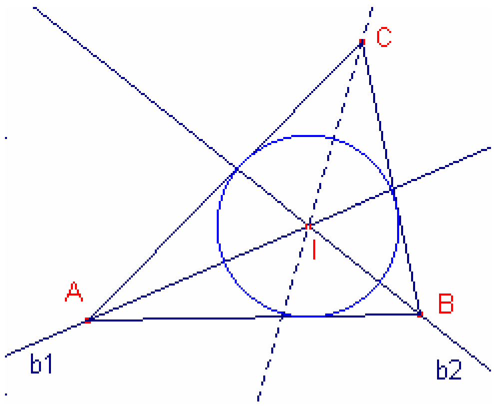
Aleshores, el diàmetre $\overline{AD} = \dfrac{b}{\sin B}$

És a dir, el diàmetre d'un cercle circumscrit a un triangle és igual a la raó de proporcionalitat del teorema dels sinus.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

# Bisectrius i incentre.

La **bisectriu**: És la recta que passa pel vèrtex que formen dos costats i divideix per la meitat a l'angle que formen els mateixos costats.




## Propietat:

Les 3 bisectrius d'un triangle es creuen en un punt que s'anomena **incentre**, que té la propietat de ser el centre de la circumferència inscrita al triangle.

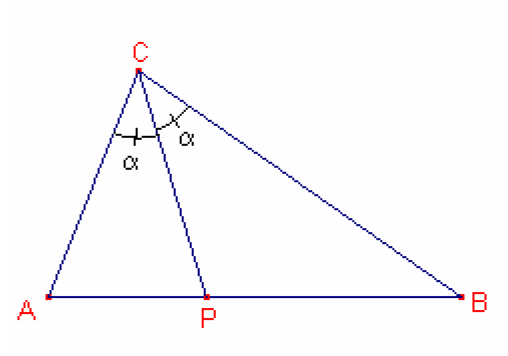
Demostració:
Siguen $b_1, b_2$ les bisectrius corresponents als vèrtexs A, B, les quals es tallen en el punt I.
El punt I equidista dels costats b, c.
El punt I equidista dels costats a, c.
Aleshores el punt I equidista dels costats a, c. Per tant el punt I pertany a la bisectriu corresponent al vèrtex C.
El punt I equidista dels tres costats, aquesta distància serà el radi de la circumferència tangent als costats.

Nota: si la distància del centre d'una circumferència a una recta és igual al radi la recta és tangent a la circumferència.

## Propietat de la bisectriu d'un triangle:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ considerem el punt P intersecció de la bisectriu de l'angle $\angle ACB$ amb el costat $\overline{AB}$.

Aleshores: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{PB}}$




La bisectriu d'un angle d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ divideix al costat oposat en parts proporcionals als costats adjacents.

Demostració:
Siga $\angle ACP = \angle PCB = \alpha$

S'observa que els angles:
$\angle CPB = 180^{o} - (B+\alpha)$, $\angle CPA = B+\alpha$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{CPB}$:

$$\frac{\overline{PB}}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin(180^{o} - (C+\alpha))} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin(C+\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{a}{\overline{PB}} \qquad (1)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{APC}$

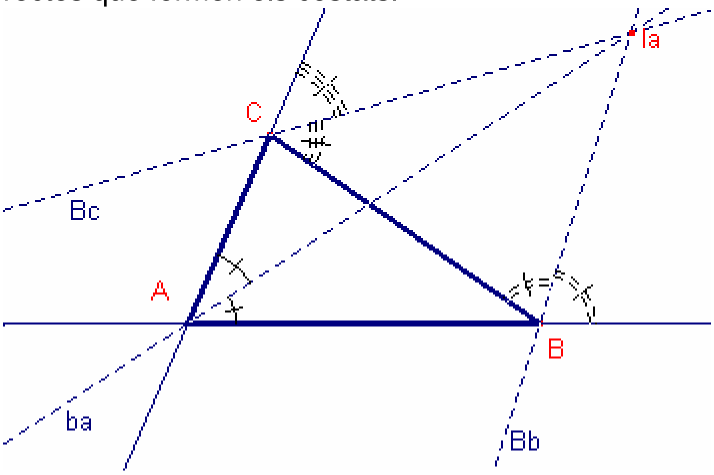
$$\frac{\overline{AP}}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin(C+\alpha)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin(C+\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{b}{\overline{AP}} \qquad (2)$$

De les igualtats (1), (2) tenim:

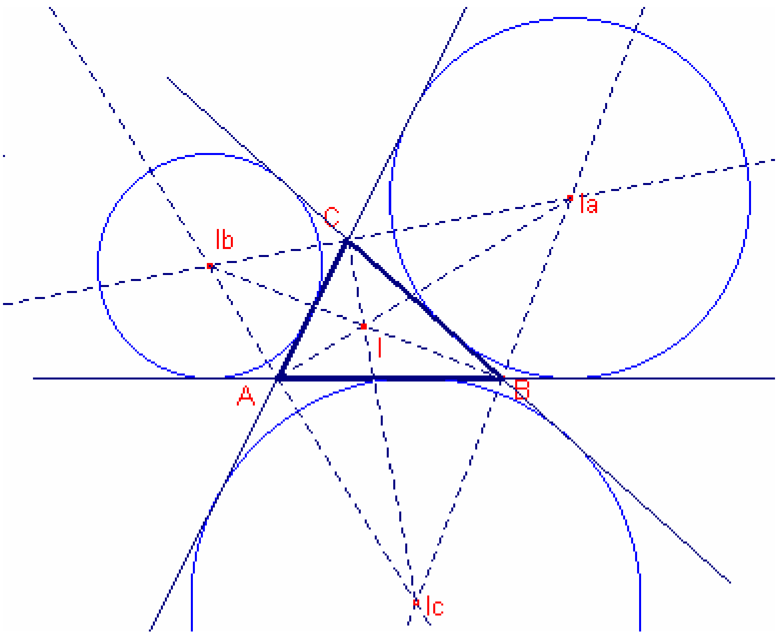
$$\frac{c}{\overline{AP}} = \frac{b}{\overline{PB}}$$

## Circumferències exinscrites.

Considerem $b_a$ la bisectriu de l'angle A, $B_b$ la bisectriu de l'angle exterior de B i $B_c$ la bisectriu de l'angle exterior de C.
Les tres bisectrius s'intersecten en un punt $I_a$ (exincentre de a) que equidista de les rectes que formen els costats.




Anàlogament aconseguiríem els altres exincentres $I_b$, $I_c$
Les tre circumferències tangents als costats i exteriors al triangle s'anomenen circumferències exinscrites.




## Propietat:

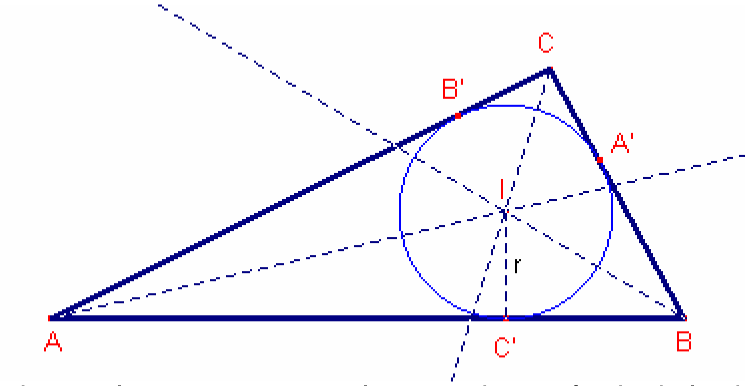
El triangle format pels incentres $\overset{\Delta}{I_aI_bI_c}$ té per altures les bisectrius del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Demostració:
Notem que les bisectrius exteriors a un vèrtex i la bisectriu interior formen 90º.

## Propietat: Proporció entre els radis de les circumferències inscrites i exinscrites.

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siguen r i $r_a$ els radis de les circumferències inscrita i exinscrita, respectivament.

Aleshores, $\frac{r}{r_a} = \frac{p-a}{p}$ on p és el semiperímetre del triangle $p = \frac{a+b+c}{2}$

Demostració:




Siguen els punts A', B', C' els punts de tangència de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ amb els costats.

$\overline{AC'} = \overline{AB'}, \overline{BC'} = \overline{BA'}, \overline{CA'} = \overline{CB'}$

Aleshores, $\overline{AC'} + \overline{BA'} + \overline{CA'} = p$

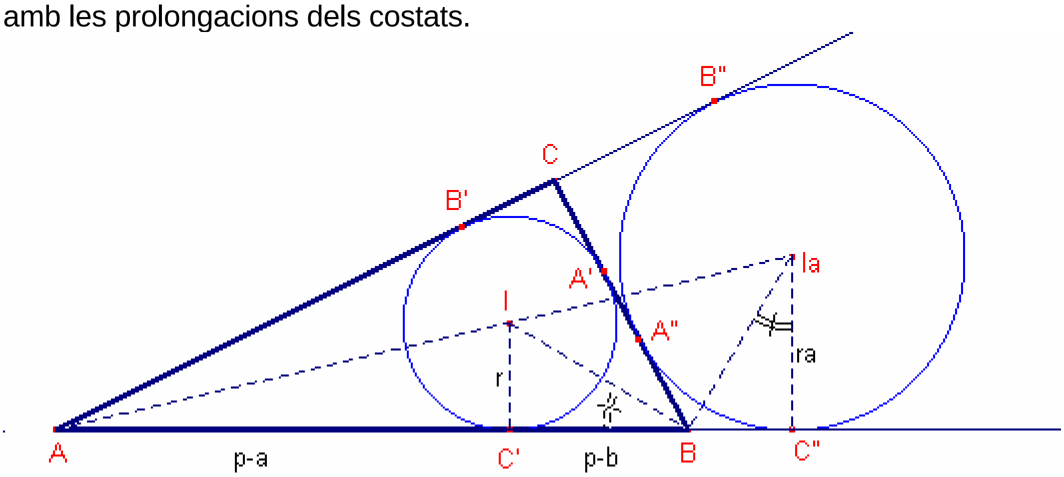
$\overline{BA'} + \overline{CA'} = a$

Per tant $\overline{AC'} = \overline{AB'} = p - a$

Anàlogament, $\overline{BC'} = \overline{BA'} = p - b, \overline{CA'} = \overline{CB'} = p - c$

Siga la circumferència exinscrita de centre $I_a$ i radi $r_a$.

Siguen A", B", C" els punts de tangència de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ amb les prolongacions dels costats.




Calculem $\overline{BC''}$ i $\overline{AC''}$

$\overline{AC''} = \overline{AB''}, \overline{BC''} = \overline{BA''}, \overline{CA''} = \overline{CB''}$

Aleshores; $\overline{AC} + \overline{CA''} = \overline{AB} + \overline{BC''}$

$\overline{AB} + \overline{BA''} = \overline{AB} + \overline{BC''}$

Sumant les expressions:

$2p = 2c + 2\cdot\overline{BC''}$, aleshores, $\overline{BC''} = p - c$

Per tant, $\overline{AC''} = (p-a) + (p-b) + (p-c) = p$

Els triangle $I\overset{\Delta}{A}C'$, $I_a\overset{\Delta}{A}C''$ són semblants, aleshores,

$$\frac{r}{r_a} = \frac{p-a}{p}$$

Anàlogament, $\frac{r}{r_b} = \frac{p-b}{p}$, $\frac{r}{r_c} = \frac{p-c}{p}$

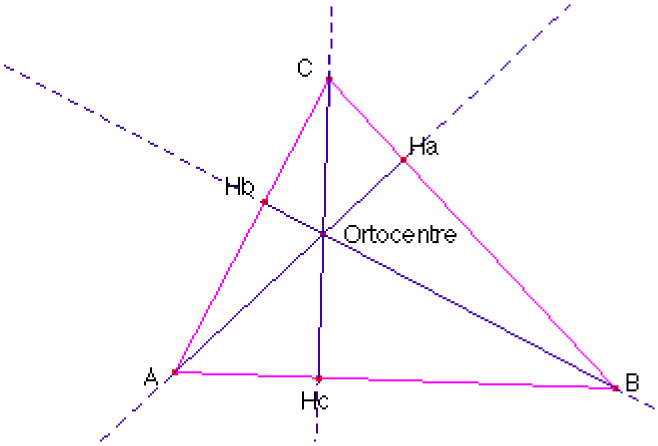
**Nota:** També podem provar que:

$\overline{C'C''} = a$, $\overline{B'B''} = b$, $\overline{A'A''} = \left|\overline{CA'} - \overline{BA''}\right| = \left|\overline{CB'} - \overline{BC''}\right| = \left|(p-c) - (p-a)\right| = |a-c|$

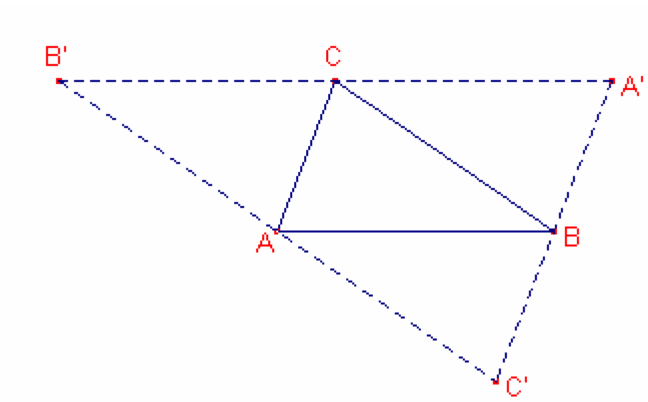
# Altures i ortocentre.

L'**altura**: És la recta que passa per un vèrtex i es perpendicular al costat oposat.

Propietat:
Les tres altures d'un triangle es creuen en un punt que s'anomena **ortocentre**.




Demostració:




Reduirem aquest cas al cas de les mediatrius.
Pels vèrtexs A, B, C dibuixem paral· leles als costats oposats respectius.
Aquestes rectes es tallen dos a dos en els punts A', B', C'.

Es formen tres triangles $\overset{\Delta}{ACB'}$, $\overset{\Delta}{ABC'}$, $\overset{\Delta}{BCA'}$ iguals al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Tenen un costat comú i els altres dos costats paral· lels.

D'aquesta igualtat de triangles tenim que $\overline{AB'} = \overline{BC}$, $\overline{AC'} = \overline{BC}$, aleshores, $\overline{AB'} = \overline{AC'}$
És a dir, A és el punt mig del segment $\overline{B'C'}$, B és el punt mig del segment $\overline{A'C'}$ i C és el punt mig del segment $\overline{A'B'}$.

Normalment considerem l'altura d'un triangle com el segment de la recta altura que uneix el vèrtex i el punt del costat oposat, $\overline{CH_C}$, $\overline{AH_A}$, $\overline{BH_B}$.

Les altures del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ són perpendiculars als costats del triangle $\overset{\Delta}{A'B'C'}$, per tant són mediatrius del triangle $\overset{\Delta}{A'B'C'}$, que s'intersecten en un punt.

Aleshores, les tres altures del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ s'intersecten en un punt, que s'anomena ortocentre.

## Propietat: fórmula de l'altura en funció dels costats.

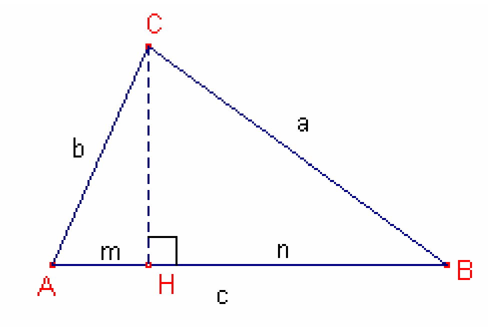
En un triangle qualsevol $\overset{\Delta}{ABC}$

$$h_A = \overline{AH_A} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2a}$$

$$h_B = \overline{BH_B} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2b}$$

$$h_C = \overline{CH_C} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2c}$$

Demostració:




Siga l'altura $\overline{CH} = h_C$

Siga el segment $\overline{AH} = m$

Per ser el triangle $\overset{\Delta}{ACH}$ rectangle,

$h_C^2 = b^2 - m^2$

Per ser el triangle $\overset{\Delta}{BCH}$ rectangle,

$h_C^2 = a^2 - (c-m)^2$

Restant ambdues igualtats, $b^2 - m^2 = a^2 - (c^2 + m^2 - 2cm) \quad \Rightarrow \quad m = \dfrac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}$

Aleshores,

$$\begin{aligned} h_C^2 &= b^2 - \left(\frac{-a^2+b^2+c^2}{2c}\right)^2 = \\ &= b^2 - \frac{(-a^2+b^2+c^2)^2}{4c^2} = \\ &= \frac{(2bc)^2 - (b^2+c^2+-a^2)^2}{4c^2} = \\ &= \frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)\cdot(2bc-b^2-c^2+a^2)}{4c^2} = \\ &= \frac{((b+c)^2-a^2)\cdot(a^2-(b-c)^2)}{4c^2} = \\ &= \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4c^2} \end{aligned}$$

Aleshores,

$$h_C = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2c}$$

Les altres fórmules es demostren anàlogament.

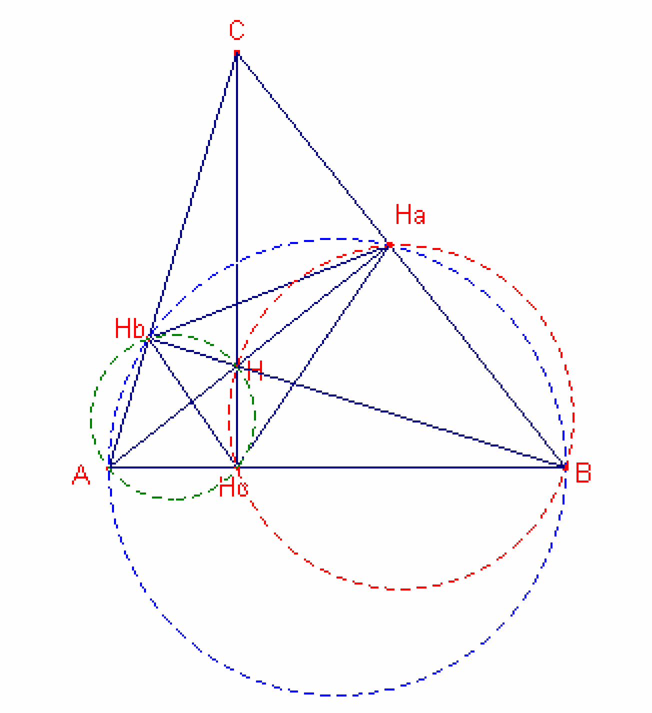
## Triangle òrtic.

Donat el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ acutangle, siguen $H_a, H_b, H_c$ els peus de les altures.

El triangle $\overset{\Delta}{H_aH_bH_c}$ s'anomena triangle òrtic del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

## Propietat:

Les bisectrius del triangle òrtic són les altures del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.




Demostració:

Provem que l'altura $\overline{CH_c}$ és bisectriu de l'angle $\angle H_aH_cH_b$

$\angle AH_aB = 90^o$, $\angle AH_bB = 90^o$ aleshores el quadrilàter $ABH_aH_b$ és cíclic.
Aleshores, $\alpha = \angle H_aAH_b = \angle H_aBH_b$ (són angles interiors que abracen el mateix arc).

$\angle HH_aB = 90^o$, $\angle HH_cB = 90^o$, aleshores el quadrilàter $HH_cBH_a$ és cíclic.
Aleshores, $\alpha = \angle H_aBH_a = \angle H_aBH = \angle HH_cH_a$ (1)

$\angle HH_cA = 90^o$, $\angle HH_bA = 90^o$, aleshores el quadrilàter $HH_bAH_c$ és cíclic.
Aleshores, $\alpha = \angle H_aAH_b = \angle HAH_b = \angle HH_cH_b$ (2)

De (1) i (2) $\angle HH_cH_a = \angle HH_cH_b$, aleshores, l'altura $\overline{CH_c}$ és bisectriu de l'angle $\angle H_aH_cH_b$

Per a les altres altures es provaria anàlogament.

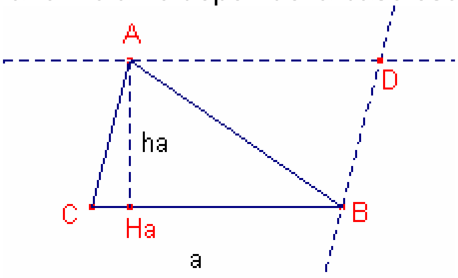
## Àrea d'un triangle.

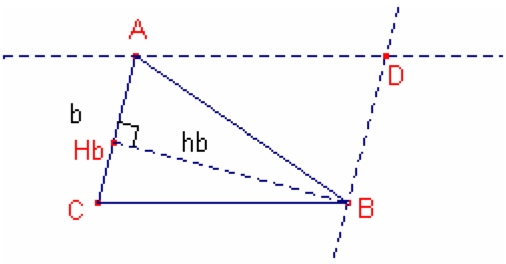
**Propietat: l'àrea d'un triangle**

L'àrea d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$\left[\overset{\Delta}{ABC}\right]=\frac{\text{base}\times\text{altura}}{2}=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}$$

la fórmula no depén de la base escollida.




Siga r la recta paral·lela al costat a que passa pel punt A
Siga s la recta paral·lela al costat b que passa pel punt B
Siga D el punt intersecció de les rectes r, s.
ACBD és un paral·lelogram.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és la meitat de l'àrea del paral·lelogram.

**Fórmula d'Heró**. L'àrea d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$\left[\overset{\Delta}{ABC}\right]=\frac{c\cdot h_c}{2}=\frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4}$$

Si fem el canvi $p=\dfrac{a+b+c}{2}$, tenim que:

$$p-a=\frac{-a+b+c}{2},\ p-b=\frac{a-b+c}{2},\ p-c=\frac{a+b-c}{2}$$

la fórmula quedaria: $\left[\overset{\Delta}{ABC}\right]=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

**Fórmules trigonomètriques:** L'àrea d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$\text{Àrea}=\frac{b\cdot c\cdot \sin A}{2}\qquad \text{Àrea}=\frac{a\cdot c\cdot \sin B}{2}\qquad \text{Àrea}=\frac{a\cdot b\cdot \sin C}{2}$$

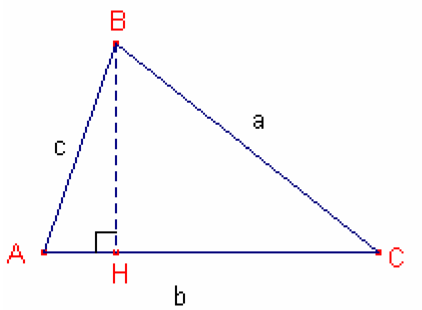
Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

Siga l'altura $\overline{BH}$

L'àrea d'un triangle és

$$\left[\overset{\Delta}{ABC}\right]=\frac{\text{base}\times\text{altura}}{2}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BH}}{2}$$

$\overline{AC}=b$




Considerant el triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHB}$

$\overline{BH}=c\cdot\sin A$

Aleshores,

$$\left[\overset{\Delta}{ABC}\right]=\frac{bc\cdot\sin A}{2}$$

Anàlogament obtindríem les altres fórmules.

**Fórmula amb el radi de la circumferència circumscrita.** L'àrea d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$S=\dfrac{abc}{4R}$ on R és el radi de la circumferència circumscrita.

Pel teorema dels sinus:

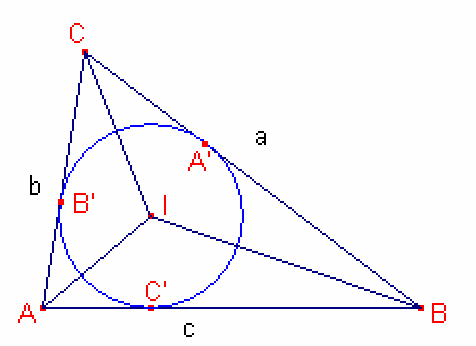
$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$, aleshores, $\sin A=\dfrac{a}{2R}$

A partir de la fórmula trigonomètrica de l'àrea:

$$\left[\overset{\Delta}{ABC}\right]=\frac{bc\cdot\sin A}{2}=\frac{abc}{4R}$$

**Fórmula amb el radi de la circumferència inscrita.** L'àrea d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$S=rp$ on p és el semiperímetre $p=\dfrac{a+b+c}{2}$




Siga I l'incentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Siga r el radi de la circumferència inscrita a $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siguen A', B', C', els punts de tangència de la circumferència inscrita i el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Podem notar que $\overline{IA'}=\overline{IB'}=\overline{IC'}=r$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és igual a la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABI}$, $\overset{\Delta}{BCI}$, $\overset{\Delta}{ACI}$

$$\left[\overset{\Delta}{ABC}\right]=\left[\overset{\Delta}{ABI}\right]+\left[\overset{\Delta}{BCI}\right]+\left[\overset{\Delta}{ACI}\right]=\frac{c\cdot r}{2}+\frac{a\cdot r}{2}+\frac{b\cdot r}{2}=\frac{a+b+c}{2}\cdot r=rp$$

**Nota 1:** Fórmula per a calcular el radi de la circumferència inscrita en funció dels costats.

$$r=\frac{\text{àrea }\overset{\Delta}{ABC}}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

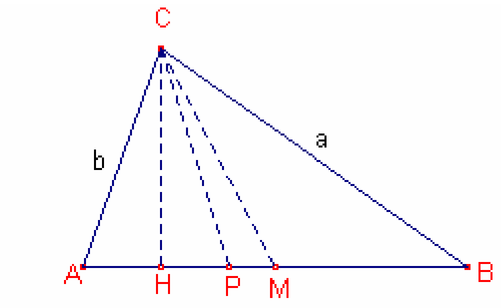
**Nota 2:** A partir de la proporció entre els radis de les circumferències inscrita i exinscrites tenim les fórmules dels radis de les exinscrites en funció dels costats:

$$r_a=\frac{r\cdot p}{p-a}=\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}},\ r_b=\frac{r\cdot p}{p-b}=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}},\ r_c=\frac{r\cdot p}{p-a}=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$$

## Teorema: sobre l'altura, bisectriu i mitjana d'un triangle

En tot triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ la bisectriu coincideix amb l'altura o la mitjana o roman entre elles.

Demostració:
Siga $\overline{CH}$ l'altura, $\overline{CP}$ la bisectriu, $\overline{CM}$ la mitjana referides al vèrtex C del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.




Si $a = b$ aleshores, la bisectriu, la mitjana i l'altura al vèrtex C coincideixen.

Suposem $b < a$ aleshores, $\hat{B} < \hat{A}$ i també, $\angle ACH < \angle BCH$

$\angle BCH > \frac{1}{2}(\angle ACH + \angle BCH) = \frac{1}{2}\hat{C}$, és a dir, $\angle BCH > \angle BCP$
Aleshores, el punt P es troba entre H i B.

Per la propietat de les bisectrius:
$\frac{b}{\overline{\overline{AP}}} = \frac{a}{\overline{\overline{PB}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{PB}}{\overline{\overline{AP}}} = \frac{a}{b} > 1$, per tant, $\overline{PB} > \overline{AP}$
$\overline{AP} < \frac{1}{2}\left(\overline{AP} + PB\right) < \frac{1}{2}c$
Aleshores P es troba entre P i M

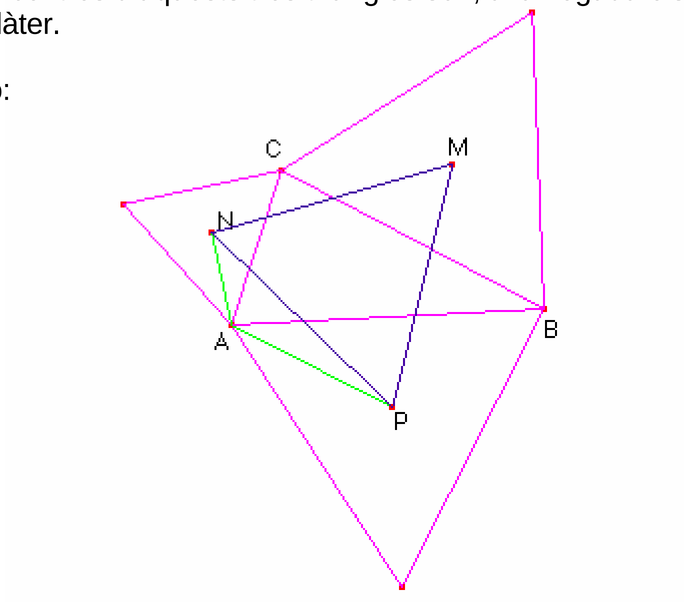
# Teoremes

# Els teoremes de Napoleó

## Teorema de Napoleó 1: (demostració trigonomètrica)

Si sobre els costats d'un triangle qualsevol $\overset{\Delta}{ABC}$ construïm tres triangles equilàters exteriors, els centres d'aquests tres triangles són, a la vegada els vèrtexs d'un nou triangle equilàter.

Demostració:




Siguen els segments $\overline{NP} = x \quad \overline{MN} = y \quad \overline{MP} = z$

Volem demostrar que $x = y = z$

$\angle PAB = 30^o \quad \angle CAN = 30^o$

$\overline{AP} = \frac{c}{3}\sqrt{3} \quad \overline{AN} = \frac{b}{3}\sqrt{3}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ANP}$

$$x^2 = \left(\frac{c}{3}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{b}{3}\sqrt{3} \cdot \cos(60^o + A)$$

$$x^2 = \frac{1}{3}\left(c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos(60^o + A)\right)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CMN}$.

$$y^2 = \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{b}{3}\sqrt{3} \cdot \cos(60^o + C)$$

$$y^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(60^o + C)\right)$$

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{3}\left(c^2 - a^2 - 2b(c \cdot \cos(60^o + A) - a \cdot \cos(60^o + C)\right)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $\quad c=\dfrac{a\cdot\sin C}{\sin A}$

$$x^2-y^2=\frac{1}{3}\left(c^2-a^2-2b\left(\frac{a\cdot\sin C}{\sin A}\cdot\cos(60^o+A)-a\cdot\cos(60^o+C)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(c^2-a^2-2ab\left(\frac{\sin C}{\sin A}(\cos 60^o\cos A-\sin 60^o\sin A)-(\cos 60^o\cos C-\sin 60^o\sin C)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(c^2-a^2-2ab\left(\frac{1}{2}\frac{\sin C}{\sin A}\cos A-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sin C}{\sin A}\sin A-\frac{1}{2}\cos C+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(c^2-a^2-ab\left(\frac{\sin C}{\sin A}\cos A-\cos C\right)\right)=$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $\quad c=\dfrac{a\cdot\sin C}{\sin A}$

i el teorema del cosinus $\cos A=\dfrac{a^2-b^2-c^2}{-2bc}$ $\quad \cos C=\dfrac{c^2-a^2-b^2}{-2ab}$

Obtenim:

$$x^2-y^2=\frac{1}{3}\left(c^2-a^2-ab\left(\frac{c}{a}\frac{a^2-b^2-c^2}{-2bc}-\frac{c^2-a^2-b^2}{-2ab}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(c^2-a^2-ab\left(\frac{c(a^2-b^2-c^2)}{-2abc}+\frac{c^2-a^2-b^2}{2ab}\right)\right)=$$

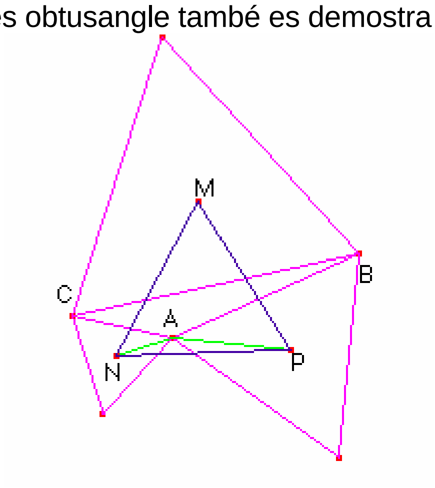
$$=\frac{1}{3}\left(c^2-a^2+\frac{a^2-b^2-c^2}{2}-\frac{c^2-a^2-b^2}{2}\right)=0$$

Aleshores, $x^2-y^2=0 \quad\Rightarrow\quad x=y$

Anàlogament demostraríem que $z^2-x^2=0$

Per tant, el triangle $\overset{\Delta}{MNP}$ és equilàter.

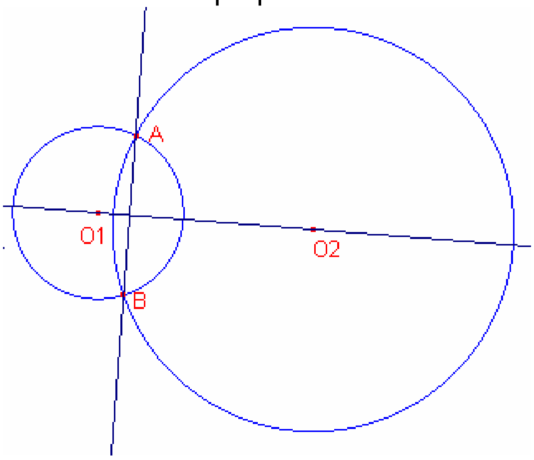
Observa que si l'angle A és obtusangle també es demostra de forma anàloga.



## Teorema de Napoleó 1: (demostració sintètica)

### Lema 1:
Un quadrilàter és cíclic (inscriptible en una circumferència) si i només si els seus angles oposats sumen 180º

### Lema 2:
Siguen dues circumferències que s'intersecten. La recta que uneix els punts d'intersecció és perpendicular a la recta que uneix els centres.




Demostració:

$O_1$ pertany a la mediatriu del segment $\overline{AB}$ perquè $\overline{O_1A}=\overline{O_1B}$

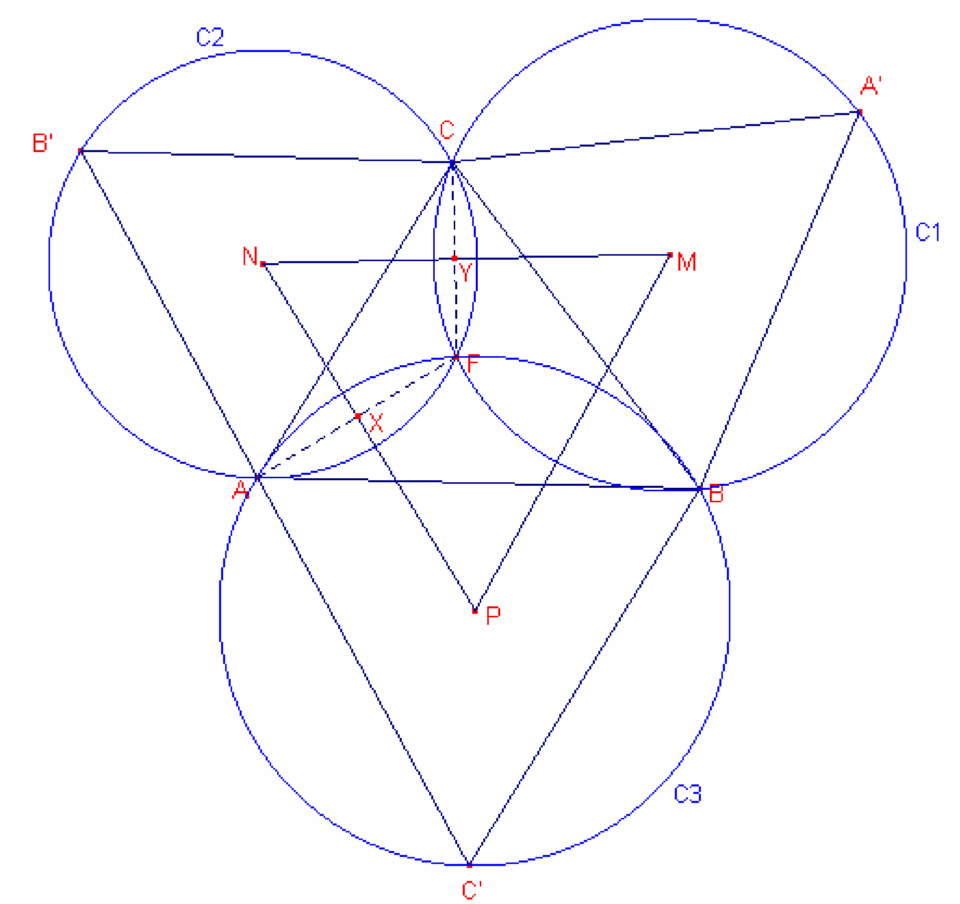
$O_2$ pertany a la mediatriu del segment $\overline{AB}$ perquè $\overline{O_2A}=\overline{O_2B}$

Per tant, la recta mediatriu és la recta que passa pels punts $O_1$, $O_2$

Aleshores, $\overline{O_1O_2}$ és perpendicular a $\overline{AB}$

## Teorema de Napoleó 1:

Si sobre els costats d'un triangle qualsevol $\overset{\Delta}{ABC}$ construïm tres triangles equilàters exteriors, els centres d'aquests tres triangles són, a la vegada els vèrtexs d'un nou triangle equilàter.




En la figura considerem:

El triangle equilàter $\overset{\Delta}{BCA'}$ de centre M i la seua circumferència circumscrita $C_1$,

El triangle equilàter $\overset{\Delta}{ACB'}$ de centre N i la seua circumferència circumscrita $C_2$,

El triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC'}$ de centre P i la seua circumferència circumscrita $C_3$.

Siga F el punt intersecció de les circumferències $C_1$, $C_2$.
$\angle AFC = 120^o$, $\angle BFC = 120^o$ (per ser angles interiors de les circumferències $C_1$, $C_2$, respectivament).

Aleshores l'angle $\angle AFB = 120^o$
Per tant, el quadrilàter AFBC' és inscriptible en una circumferència.
El triangle $\overset{\Delta}{ABC'}$ està inscrit en la circumferència $C_3$ aleshores F pertany a $C_3$.

Per tant F és la intersecció de les tres circumferències.

Considerem els segments $\overline{AF}, \overline{CF}$
Els segments $\overline{NP}$, $\overline{AF}$ són perpendiculars (pel lema A, F és la intersecció de $C_1$, $C_3$ i N, i P els centres d'ambdues circumferències).

Anàlogament els segments $\overline{NM}$, $\overline{CF}$ són perpendiculars.

Considerem el segment $\overline{NP}$ que talla el segment $\overline{AF}$ en el punt X.
Considerem el segment $\overline{NM}$ que talla el segment $\overline{CF}$ en el punt Y.
Per tant, $\angle NXF = 90^o$, $\angle NYF = 90^o$.

El quadrilàter NXFY és inscriptible en una circumferència (la suma de dos angles oposats és 180º)
$\angle XFY = 120^o$
Aleshores, $\angle XNY = 60^o$

Anàlogament provaríem que $\angle NMP = 60^o$, $\angle NPM = 60^o$

Aleshores els triangle $\overset{\Delta}{MNP}$ és equilàter.

Conseqüències:

## Teorema d'Steiner

En la construcció anterior:
Els segments $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ s'intersecten en el punt F que s'anomena punt d'Steiner o de Fermat.
A més a més $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$

Demostració:
$\angle B'FA = 60^o$, $\angle AFB = 120^o$, per tant B', F, B estan alineats
Anàlogament A', F, A estan alineats i C', F, C estan alineats.

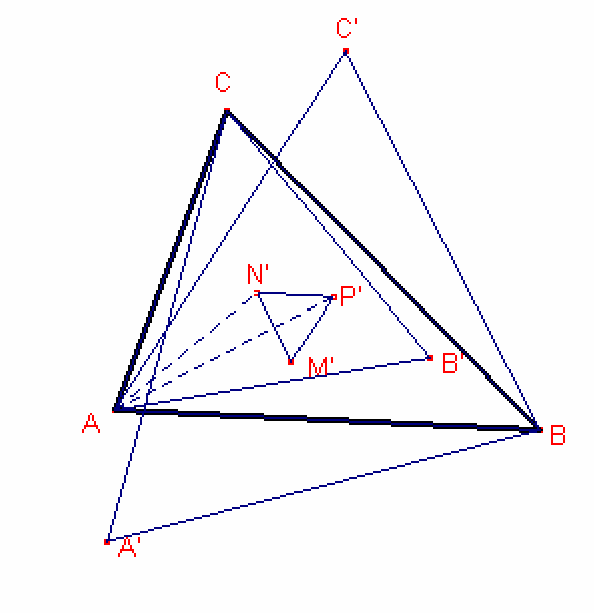
Notem que un gir de 60º de centre A del triangle $\overset{\Delta}{CB'B}$ és transforma en el triangle $\overset{\Delta}{CAA'}$, aleshores $\overline{AA'} = \overline{BB'}$.

Anàlogament $\overline{BB'} = \overline{CC'}$

## Teorema de Napoleó 2:

Si sobre els costats d'un triangle qualsevol $\overset{\Delta}{ABC}$ construïm tres triangles equilàters interiors, els centres d'aquests tres triangles són, a la vegada els vèrtexs d'un nou triangle equilàter.

Demostració:




Siguen els segments $\overline{N'P'} = x \quad \overline{M'N'} = y \quad \overline{M'P'} = z$

Volem demostrar que $x = y = z$

$\angle P'AB=30^o \quad \angle CAN'=30^o$

$\overline{AP'} = \frac{c}{3}\sqrt{3} \quad \overline{AN'} = \frac{b}{3}\sqrt{3}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AN'P'}$

$$x^2 = \left(\frac{c}{3}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\sqrt{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{c}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{b}{3}\sqrt{3}\cdot\cos(A-60^o)$$

$$x^2 = \frac{1}{3}\left(c^2 + b^2 - 2bc\cdot\cos(A-60^o)\right)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CM'N'}$.

$$y^2 = \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\sqrt{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{a}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{b}{3}\sqrt{3}\cdot\cos(C-60^o)$$

$$y^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos(C-60^o)\right)$$

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{3}\left(c^2 - a^2 - 2b(c\cdot\cos(A-60^o) - a\cdot\cos(C-60^o)\right)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $c=\dfrac{a\cdot\sin C}{\sin A}$

$$x^2-y^2=\frac{1}{3}\left(c^2-a^2-2b\left(\frac{a\cdot\sin C}{\sin A}\cdot\cos(A-60^o)-a\cdot\cos(C-60^o)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(c^2-a^2-2ab\left(\frac{\sin C}{\sin A}(\cos 60^o\cos A+\sin 60^o\sin A)-(\cos 60^o\cos C+\sin 60^o\sin C)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(c^2-a^2-2ab\left(\frac{1}{2}\frac{\sin C}{\sin A}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sin C}{\sin A}\sin A-\frac{1}{2}\cos C-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(c^2-a^2-ab\left(\frac{\sin C}{\sin A}\cos A-\cos C\right)\right)=$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $c=\dfrac{a\cdot\sin C}{\sin A}$

i el teorema del cosinus $\cos A=\dfrac{a^2-b^2-c^2}{-2bc}$ $\cos C=\dfrac{c^2-a^2-b^2}{-2ab}$

Obtenim:

$$x^2-y^2=\frac{1}{3}\left(c^2-a^2-ab\left(\frac{c}{a}\frac{a^2-b^2-c^2}{-2bc}-\frac{c^2-a^2-b^2}{-2ab}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(c^2-a^2-ab\left(\frac{c(a^2-b^2-c^2)}{-2abc}+\frac{c^2-a^2-b^2}{2ab}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(c^2-a^2+\frac{a^2-b^2-c^2}{2}-\frac{c^2-a^2-b^2}{2}\right)=0$$

Aleshores, $x^2-y^2=0 \quad\Rightarrow\quad x=y$

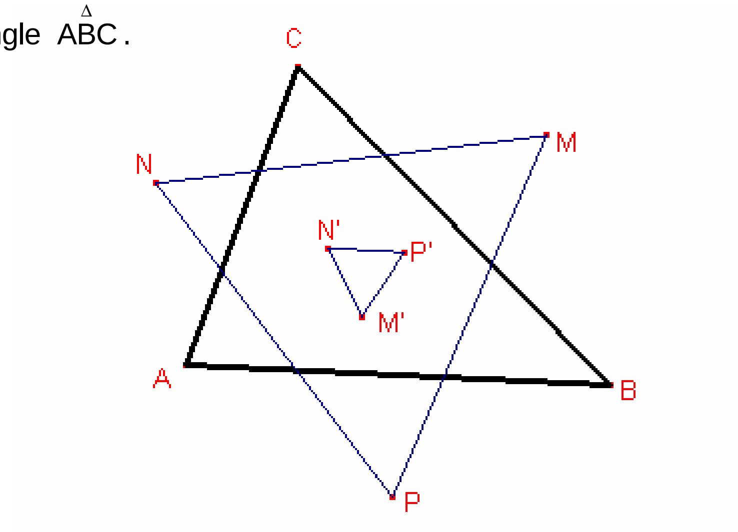
Anàlogament demostraríem que $z^2-x^2=0$

Per tant, el triangle $\overset{\Delta}{M'N'P'}$ és equilàter.

## Teorema d'àrees dels triangles de Napoleó.

La diferència entre les àrees dels triangles equilàters de Napoleó (exterior i interior) és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Demostració:




Siga $\overset{\Delta}{MNP}$ el triangle de Napoleó construït amb els centres dels triangles equilàters construïts sobre els costats del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i exteriors al triangle.
Siga $\overset{\Delta}{M'N'P'}$ el triangle de Napoleó construït amb els centres dels triangles equilàters construïts sobre els costats del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i interiors al triangle.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és $\left[\overset{\Delta}{ABC}\right]=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A$

Els triangles $\overset{\Delta}{MNP}$, $\overset{\Delta}{M'N'P'}$ són equilàters, per tant:
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MNP}$ és igual a $\left[\overset{\Delta}{MNP}\right]=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{NP}^2$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{M'N'P'}$ és igual a $\left[\overset{\Delta}{M'N'P'}\right]=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{N'P'}^2$

En el teorema de Napoleó havíem provat que:

$$\overline{NP}^2=\frac{1}{3}\left(c^2+b^2-2bc\cdot\cos(A+60^o)\right)$$

$$\overline{N'P'}^2=\frac{1}{3}\left(c^2+b^2-2bc\cdot\cos(A-60^o)\right)$$

La diferència d'àrees és:

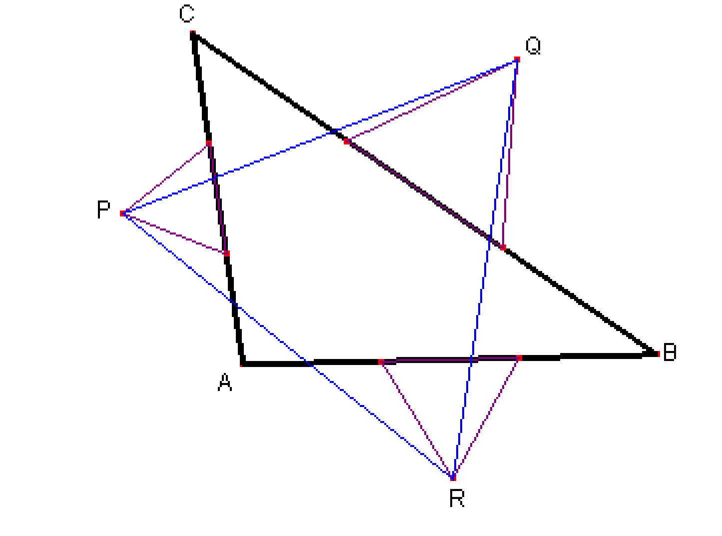
$$\left[\overset{\Delta}{MNP}\right]-\left[\overset{\Delta}{M'N'P'}\right]=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{NP}^2-\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{N'P'}^2=\frac{\sqrt{3}}{6}\left(-2bc\left(\cos(A+60^o)-\cos(A-60^o)\right)\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}(2bc)\left(-\cos(A+60^o)+\cos(A-60^o)\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}bc\left(-\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A=\left[\overset{\Delta}{ABC}\right]$$

## Teorema de Napoleó 3.

Dividim els costats d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ qualsevol en tres parts iguals. Sobre cadascuna de les parts centrals dibuixem tres triangles equilàters exteriors al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, els vèrtexs exteriors d'aquests tres triangles equilàters són, a la vegada els vèrtexs d'un nou triangle equilàter.




Demostració:
Notem que els punts P, Q, R són els centres dels triangles equilàters construïts sobre els costats del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

# Teorema: Generalització del teorema de Napoleó.

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Sobre el costat BC, siga el punt $X_1$ tal que $\frac{BX_1}{BC}=k$ i el punt $X_2$ tal que $BX_1 = X_2C$

Sobre el costat CA, siga el punt $Y_1$ tal que $\frac{CY_1}{CA}=k$ i el punt $Y_2$ tal que $CY_1 = Y_2A$

Sobre el costat AB, siga el punt $Z_1$ tal que $\frac{AZ_1}{AB}=k$ i el punt $Z_2$ tal que $AZ_1 = Z_2B$

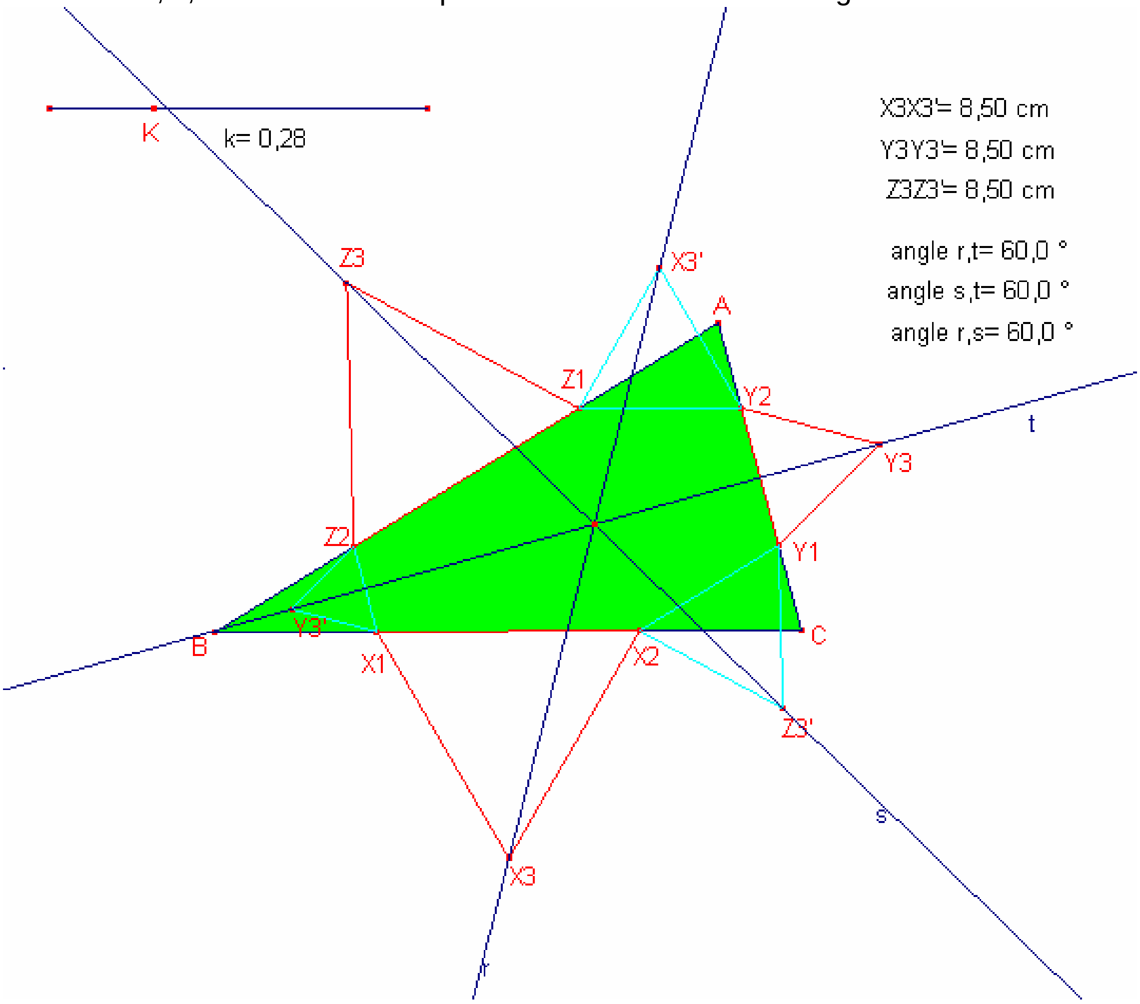
Siguen els triangles equilàters $X_1\overset{\Delta}{X_2}X_3$, $Y_1\overset{\Delta}{Y_2}Y_3$, $Z_1\overset{\Delta}{Z_2}Z_3$, $Y_2\overset{\Delta}{Z_1}X'_3$, $Z_2\overset{\Delta}{X_1}Y'_3$, $X_2\overset{\Delta}{Y_1}Z'_3$ en la mateixa orientació.

Siguen: la recta r que passa pels punts $X_3$, $X'_3$ la recta s que passa pels punts $Y_3$, $Y'_3$ i la recta t que passa pels punts $Z_3$, $Z'_3$

Aleshores:

$\overline{X_3X'_3} = \overline{Y_3Y'_3} = \overline{Z_3Z'_3}$

Les rectes r, s, t concorren en un punt i entre elles formen un angle de 60º.



# Punts de Napoleó

## Teorema 1:

Si sobre els costats d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ dibuixem tres triangles equilàters exteriors al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ (com el de la figura 1).
Siguen P, Q, R els baricentres dels triangles equilàters exteriors.
Aleshores les rectes AP, BQ, CR s'intersecten en un punt anomenat punt primer de Napoleó.

## Teorema 2:

Si sobre els costats d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ dibuixem tres triangles equilàters interiors al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ (com el de la figura 2).
Siguen P, Q, R els baricentres dels triangles equilàters interiors.
Aleshores les rectes AP, BQ, CR s'intersecten en un punt anomenat punt primer de Napoleó.

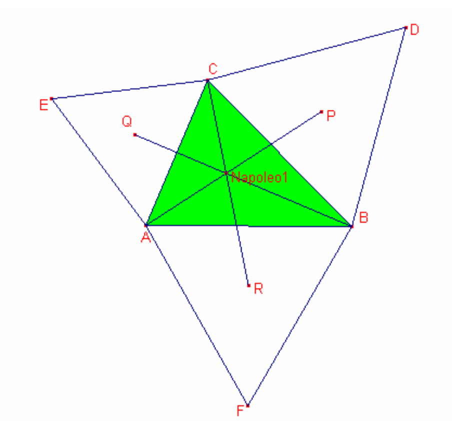



Figura 1

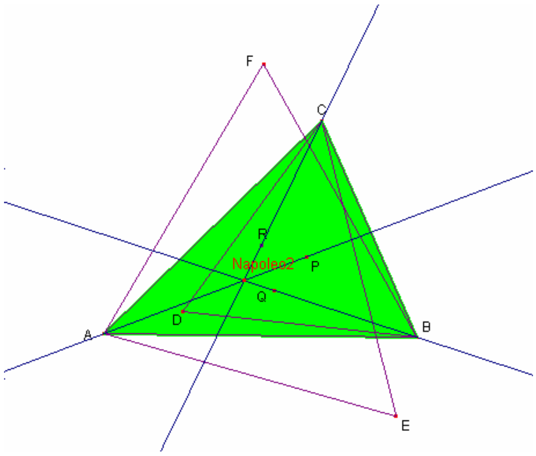



Figura2

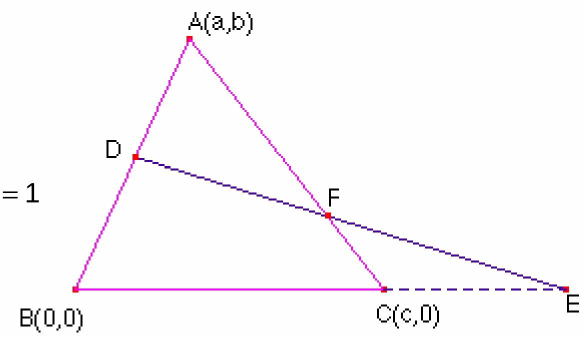
Aquests punts ha estat estudiats per John Rigby 1988.

# Teoremes de Menelau i de Ceva.

## Teorema de Menelau. (demostració analítica)

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, siguen els punts $D\in\overline{AB}, F\in\overline{AC}$.
Siga la recta g que passa pels punts B, C. Siga el punt $E\in g$.

D, E, F estan alineats $\Leftrightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}\cdot\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}\cdot\frac{\overline{CF}}{\overline{AF}}=1$




Demostració:
Siguen $\vec{AD}=r\cdot\vec{BD}$, $\vec{BE}=s\cdot\vec{CE}$, $\vec{CF}=t\cdot\vec{AF}$.
Demostrarem D, F, E, estan alineats $\Leftrightarrow$ $r\cdot s\cdot t=1$

Considerem $B(0,0)$, $A(a,b)$, $C(c,0)$
$\vec{BA}=(a,b)$, $\vec{BC}=(c,0)$, $\vec{AC}=(c-a,-b)$

Per estar D en el segment $\overline{AB}$ $D(\alpha a,\alpha b)$.
Calculem $\alpha$

$$\vec{AD}=r\cdot\vec{BD} \Rightarrow (\alpha a-a,\alpha b-b)=r(\alpha a,\alpha b) \Rightarrow \alpha=\frac{1}{1-r}$$

Per estar E en la recta g $E(\beta c,0)$. Calculem $\beta$

$$\vec{BE}=s\cdot\vec{CE} \Rightarrow (\beta c,0)=s(\beta c-c,0) \Rightarrow \beta=\frac{-s}{1-s}$$

Per estar F en el segment $\overline{AC}$ $F(c+\gamma(c-a),-\gamma b)$. Calculem $\gamma$

$$\vec{CF}=t\cdot\vec{AF} \Rightarrow (\gamma(c-a),-\gamma b)=t(c-\gamma(c-a)-a,-\gamma b-b) \Rightarrow \gamma=\frac{t}{1-t}$$

D, F, E estan alineats $\Leftrightarrow$ $\{\vec{DE},\vec{FE}\}$ són linealment dependents

$\vec{DE}=(\beta c-\alpha a,-\alpha b)$ $\vec{FE}=(\beta c-c-\gamma(c-a),\gamma b)$

D, F, E estan alineats $\Leftrightarrow \frac{\beta c-\alpha a}{\beta c-c-\gamma(c-a)}=\frac{-\alpha b}{\gamma b} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta c-\alpha a}{\beta c-c-\gamma(c-a)}=\frac{-\alpha}{\gamma} \Leftrightarrow \beta\gamma c-\alpha\gamma a=-\alpha\beta c+\alpha c+\alpha\gamma c-\alpha\gamma a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta\gamma=-\alpha\beta+\alpha+\alpha\gamma \Leftrightarrow$$

Substituint $\alpha=\frac{1}{1-r}$, $\beta=\frac{-s}{1-s}$, $\gamma=\frac{t}{1-t}$

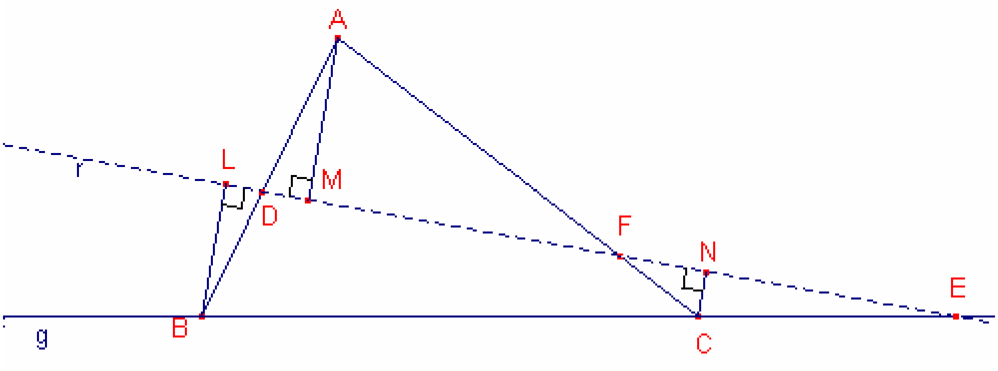
$$\Leftrightarrow \frac{-s}{1-s}\cdot\frac{t}{1-t}=\frac{-1}{1-r}\cdot\frac{-s}{1-s}+\frac{1}{1-r}+\frac{1}{1-r}\cdot\frac{t}{1-t} \Leftrightarrow r\cdot s\cdot t=1$$

## Teorema de Menelau. (demostració sintètica)

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, siguen els punts $D \in \overline{AB}$, $F \in \overline{AC}$.
Siga la recta g que passa pels punts B, C. Siga el punt $E \in g$.

D, E, F estan alineats $\Leftrightarrow \dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \dfrac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \dfrac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = 1$

($\Rightarrow$)




Suposem que D, E, F estan alineats. Siga r la recta que passa pels punts D, E, F.

Siguen $\overline{BL}, \overline{AM}, \overline{CN}$ perpendiculars a la recta r, tal que L, M, N pertanyen a la recta r.
Aleshores, $\overline{BL}, \overline{AM}, \overline{CN}$ són paral·lels.
Aplicant el teorema de Tales,

$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{BL}}$, $\dfrac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \dfrac{\overline{BL}}{\overline{CN}}$, $\dfrac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = \dfrac{\overline{CN}}{\overline{AM}}$

Multiplicant les tres igualtats:

$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \dfrac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \dfrac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = 1$

($\Leftarrow$)

Suposem que els punts $D \in \overline{AB}$, $F \in \overline{AC}$, $E \in g$, tal que, $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \dfrac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \dfrac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = 1$

Siga la recta s que passa pels punts E, F.
La recta s talla la el costat $\overline{AB}$ en el punt D'

Com D', E, F estan alineats es compleix $\dfrac{\overline{AD'}}{\overline{BD'}} \cdot \dfrac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \dfrac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = 1$

Igualant les dues expressions, $\dfrac{\overline{AD'}}{\overline{BD'}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$

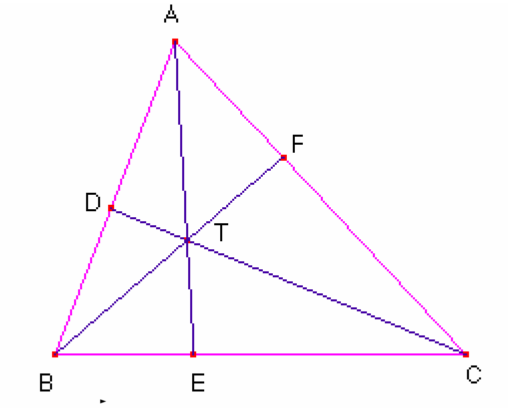
Els punts D, D' pertanyen al costat $\overline{AB}$ i divideixen el costat $\overline{AB}$ amb la mateixa raó, per tant D i D' coincideixen.
Aleshores D, E, F estan alineats.

## Teorema de Ceva. (demostració analítica)

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, siguen els punts $D \in \overline{AB}, E \in \overline{BC}, F \in \overline{AC}$.

Siguen $\vec{AD} = r \cdot \vec{BD}$, $\vec{BE} = s \cdot \vec{CE}$, $\vec{CF} = t \cdot \vec{AF}$.

Aleshores, els segments $\overline{AE}, \overline{BF}, \overline{CD}$ es tallen en un punt T $\Leftrightarrow$ $r \cdot s \cdot t = -1$




Demostració:

$(\Rightarrow)$

Suposem que els segments $\overline{AE}, \overline{BF}, \overline{CD}$ es tallen en un punt T

Aleshores $\vec{ET} = m \cdot \vec{AT}$

Com que $\vec{BE} = s \cdot \vec{CE}$, $\vec{BC} = \vec{BE} + \vec{EC} = s \cdot \vec{CE} + \vec{EC} = (1-s)\vec{EC}$

Els punts D, T, C estan alineats, aplicant el teorema de Menelau al triangle $\overset{\Delta}{BAE}$

$r \cdot (1-s) \cdot m = 1 \quad (1)$

Com que $\vec{BE} = s \cdot \vec{CE}$, $\vec{CB} = \vec{CE} + \vec{EB} = \frac{1}{s} \cdot \vec{BE} + \vec{EB} = \left(1 - \frac{1}{s}\right)\vec{EB}$

Els punts B, T, F estan alineats, aplicant el teorema de Menelau al triangle $\overset{\Delta}{AEC}$

$\frac{1}{t} \cdot \left(1 - \frac{1}{s}\right) \cdot m = 1 \quad (2)$

Dividint les expressions (1), (2)

$$\frac{r(1-s)m}{\frac{1}{t}\left(\frac{s-1}{s}\right)m} = 1 \quad \Rightarrow \quad r \cdot s \cdot t = -1$$

$(\Leftarrow)$

Suposem que els segments $\overline{AE}, \overline{BF}, \overline{CD}$ no es tallen en un punt T

Suposem que els segments $\overline{BF}, \overline{CD}$ es tallen en T.

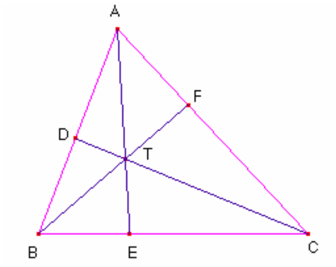
Considerem el segment $\vec{AE'}$ que passa per T i talla en E' el segment $\overline{BC}$

Siga $\vec{BE'} = x \cdot \vec{CE'}$, $s \neq x$ (ja que $E \neq E'$)
Per la implicació anterior ($\overline{AE'}, \overline{BF}, \overline{CD}$, es tallen en T), $r \cdot x \cdot t = -1$,
Com que $x \neq s \quad \Rightarrow \quad r \cdot s \cdot t \neq -1$

## Teorema de Ceva. (demostració sintètica).

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, siguen els punts $D \in \overline{AB}$, $E \in \overline{BC}$, $F \in \overline{AC}$.
Aleshores,

els segments $\overline{AE}, \overline{BF}, \overline{CD}$ es tallen en un punt T $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \dfrac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \dfrac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = 1$




Demostració:

Anomenem $\left[\overset{\Delta}{XYZ}\right]$ a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{XYZ}$

($\Rightarrow$)

Suposem que $\overline{AE}, \overline{BF}, \overline{CD}$ es tallen en un punt T

Dos triangle que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\left[\overset{\Delta}{ADC}\right]}{\left[\overset{\Delta}{BDC}\right]} = \frac{\left[\overset{\Delta}{ADT}\right]}{\left[\overset{\Delta}{BDT}\right]} = \frac{\left[\overset{\Delta}{ADC}\right] - \left[\overset{\Delta}{ADT}\right]}{\left[\overset{\Delta}{BDC}\right] - \left[\overset{\Delta}{BDT}\right]} = \frac{\left[\overset{\Delta}{ATC}\right]}{\left[\overset{\Delta}{BTC}\right]}$$

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{\left[\overset{\Delta}{BEA}\right]}{\left[\overset{\Delta}{CEA}\right]} = \frac{\left[\overset{\Delta}{BET}\right]}{\left[\overset{\Delta}{CET}\right]} = \frac{\left[\overset{\Delta}{BEA}\right] - \left[\overset{\Delta}{BET}\right]}{\left[\overset{\Delta}{CEA}\right] - \left[\overset{\Delta}{CET}\right]} = \frac{\left[\overset{\Delta}{ATB}\right]}{\left[\overset{\Delta}{ATC}\right]}$$

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = \frac{\left[\overset{\Delta}{CFB}\right]}{\left[\overset{\Delta}{AFB}\right]} = \frac{\left[\overset{\Delta}{CFT}\right]}{\left[\overset{\Delta}{AFT}\right]} = \frac{\left[\overset{\Delta}{CFB}\right] - \left[\overset{\Delta}{CFT}\right]}{\left[\overset{\Delta}{AFB}\right] - \left[\overset{\Delta}{AFT}\right]} = \frac{\left[\overset{\Delta}{BTC}\right]}{\left[\overset{\Delta}{ATB}\right]}$$

Multiplicant les tres igualtats:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = 1$$

($\Leftarrow$)

Siguen els punts $D \in \overline{AB}$, $E \in \overline{BC}$, $F \in \overline{AC}$ tal que $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \dfrac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \dfrac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = 1$ (1)

Siga T el punt intersecció de $\overline{AE}, \overline{BF}$

Siga la recta r que passa pels punt C, T que talla el costat $\overline{AB}$ en D'

Vegem que D es igual a D'

$D' \in \overline{AB}$, $E \in \overline{BC}$, $F \in \overline{AC}$ i es tallen en T aleshores, $\dfrac{\overline{AD'}}{\overline{BD'}} \cdot \dfrac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \cdot \dfrac{\overline{CF}}{\overline{AF}} = 1$ (2)

Igualant les dues (1), (2) expressions, $\dfrac{\overline{AD'}}{\overline{BD'}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$

Els punts D, D' pertanyen al costat $\overline{AB}$ i divideixen el costat $\overline{AB}$ amb la mateixa raó, per tant D i D' coincideixen.

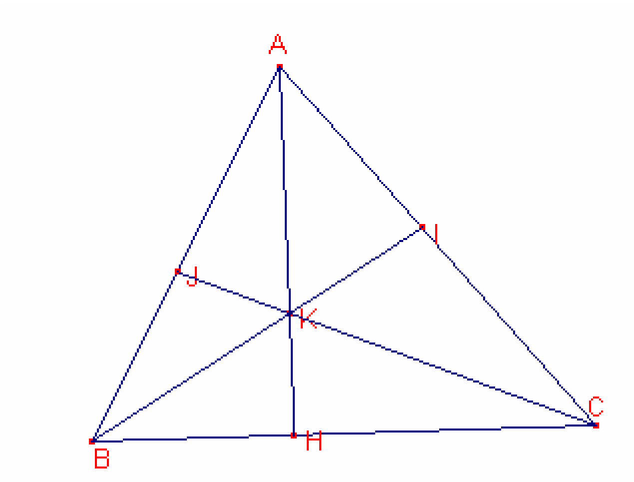
Aleshores D, E, F estan alineats.

**Nota:** tres segments que parteixen dels tres vèrtexs d'un triangle i que tallen els costats oposats i els tres es tallen en un punt s'anomenen cevianes del triangle.

## Primer teorema de Von Aubel:

Siga un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i siguen els punts H, I, J sobre els costats a, b, c respectivament, tals que els segments AH, BI, CJ concorren en el punt K. Aleshores:

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{KH}}=\frac{\overline{AJ}}{\overline{JB}}+\frac{\overline{AI}}{\overline{IC}}$$




Demostració:

Aplicant el teorema de Menelau al triangle $\overset{\Delta}{AHB}$

$$\frac{\overline{AJ}}{\overline{JB}}\cdot\frac{\overline{BC}}{\overline{HC}}\cdot\frac{\overline{KH}}{\overline{AK}}=1,\text{ per tant, }\quad \frac{\overline{AJ}}{\overline{JB}}=\frac{\overline{HC}}{\overline{BC}}\cdot\frac{\overline{AK}}{\overline{KH}}\quad (1)$$

Aplicant el teorema de Menelau al triangle $\overset{\Delta}{AHC}$

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{IC}}\cdot\frac{\overline{CB}}{\overline{HB}}\cdot\frac{\overline{KH}}{\overline{AK}}=1,\text{ per tant, }\quad \frac{\overline{AI}}{\overline{IC}}=\frac{\overline{HB}}{\overline{BC}}\cdot\frac{\overline{AK}}{\overline{KH}}\quad (2)$$

Sumant les expressions (1) i (2)

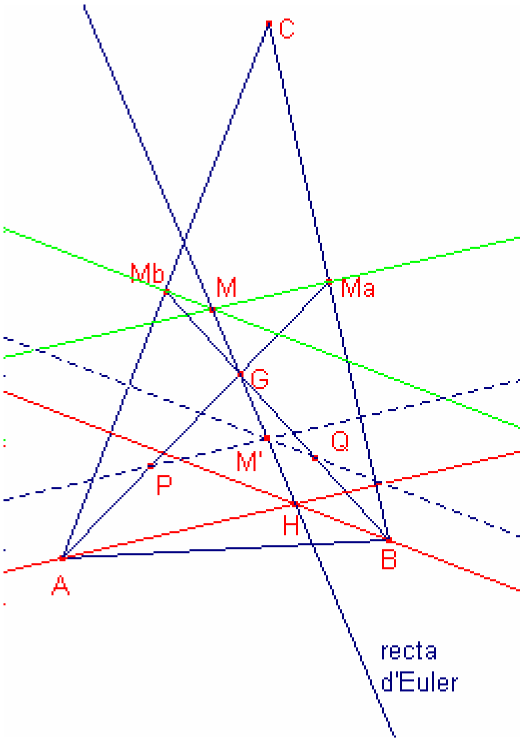
$$\frac{\overline{AJ}}{\overline{JB}}+\frac{\overline{AI}}{\overline{IC}}=\frac{\overline{HC}}{\overline{BC}}\cdot\frac{\overline{AK}}{\overline{KH}}+\frac{\overline{HB}}{\overline{BC}}\cdot\frac{\overline{AK}}{\overline{KH}}=\frac{\overline{AK}}{\overline{KH}}\left(\frac{\overline{HC}+\overline{HB}}{\overline{BC}}\right)=\frac{\overline{AK}}{\overline{KH}}$$

Anàlogament:

$$\frac{\overline{BK}}{\overline{KI}}=\frac{\overline{BH}}{\overline{HC}}+\frac{\overline{BJ}}{\overline{JC}}$$

$$\frac{\overline{CK}}{\overline{KJ}}=\frac{\overline{CH}}{\overline{HB}}+\frac{\overline{CI}}{\overline{IA}}$$

# Teorema: Recta d'Euler.




El baricentre de qualsevol triangle està alineat amb l'ortocentre i el circumcentre, i a doble distància del primer que del segon. A la recta que uneix els tres punts s'anomena **recta d'Euler**.

Demostració:

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siguen les mitjanes, $\overline{AM_a}$, $\overline{BM_b}$
Siga G el baricentre del triangle.
Siga P el punt mig del segment $\overline{AG}$.
Siga Q el punt mig del segment $\overline{BG}$.

Tracem les altures als vèrtexs A i B les quals es tallen en l'ortocentre H

Per P i Q tracem, respectivament,
dues paral· leles r, s a les altures, que es tallaran en un punt M', punt mig del segment $\overline{HG}$ ( per ser r i s paral· leles mitjanes dels triangles $\overset{\Delta}{AHG}$ i $\overset{\Delta}{BHG}$ respectivament.). Per tant $\overline{GM'} = \frac{1}{2}\overline{GH}$
Considerem la recta r' simètrica de r respecte del punt G.
Considerem la recta s' simètrica de s respecte del punt G.

Observem que el punt $M_a$ pertany a la recta r'.
Observem que el punt $M_b$ pertany a la recta s'.

Siga el punt M la intersecció de les rectes r' i s'.

M és el punt simètric de M' respecte del punt G. Per tant M, G, M', H estan alineats.
$\overline{GM} = \overline{GM'}$

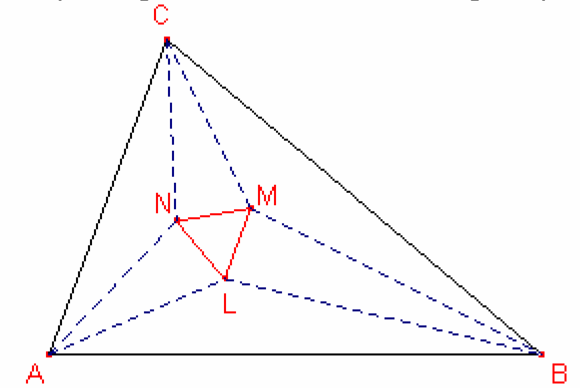
La recta r' és paral· lela a l'altura que passa per A
La recta s' és paral· lela a l'altura que passa per B

Per tant M és el circumcentre.

A més a més, per la simetria, $\overline{GM} = \overline{GM'} = \frac{1}{2}\overline{GH}$

# Teorema de Morley. (demostració trigonomètrica)

En tot triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ les semirectes que divideixen cadascun dels angles A, B, C, en tres parts iguals determinen un triangle equilàter $\overset{\Delta}{LMN}$ (veure figura).




Aquest teorema no es pot demostrar mitjançant regle i compàs ja que no es pot fer la trisecció d'un angle amb regle i compàs.

## Lema 1:

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$

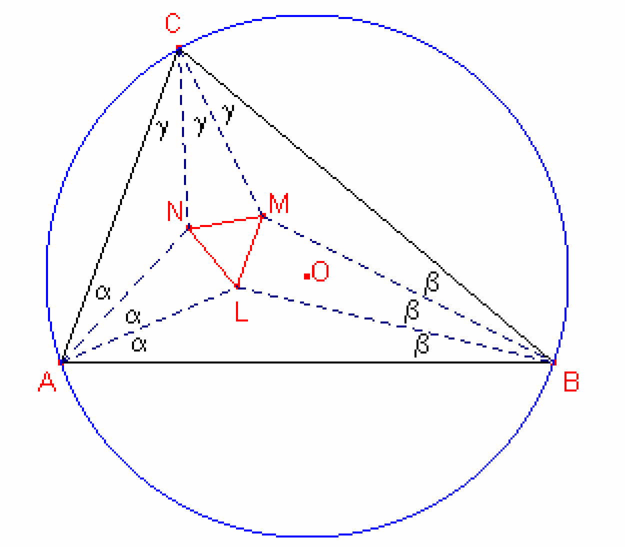
$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha$

## Lema 2:

a) $\sin 3\alpha = 4\sin\alpha\sin(60^o+\alpha)\sin(60^o-\alpha)$

b) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta) = \sin^2(\alpha+\beta)$

Demostració trigonomètrica del teorema de Morley.




$\alpha+\beta+\gamma = 60^o$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$\dfrac{a}{\sin 3\alpha} = \dfrac{b}{\sin 3\beta} = \dfrac{c}{\sin 3\gamma} = 2R$ on $R = \overline{OA}$ és el radi de la circumferència circumscrita.

Apliquem el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABL}$

$$\frac{\overline{AL}}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin(180^{o}-\alpha-\beta)}=\frac{c}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Com que $c=2R\sin 3\gamma$

$$\overline{AL}=\frac{2R\sin\beta\sin 3\gamma}{\sin(60^{o}-\gamma)}$$

Aplicant el lema 2a: $\sin 3\gamma=4\sin\gamma\sin(60^{o}+\gamma)\sin(60^{o}-\gamma)$

$$\overline{AL}=8R\sin\beta\sin\gamma\sin(60^{o}+\gamma)$$

Anàlogament:

$$\overline{AN}=8R\sin\beta\sin\gamma\sin(60+\beta)$$

Apliquem el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ALN}$

$$\overline{LN}^{2}=\overline{AL}^{2}+\overline{AN}^{2}-2\cdot\overline{AL}\cdot\overline{AN}\cdot\cos\alpha=$$
$$=64R^{2}\sin^{2}\beta\sin^{2}\gamma\left(\sin^{2}(60^{o}+\gamma)+\sin^{2}(60^{o}+\beta)-2\cdot\sin(60^{o}+\gamma)\sin(60^{o}+\beta)\cos\alpha\right)$$

$180^{o}-\alpha=120^{o}+\beta+\gamma$, per tant, $\cos\alpha=-\cos(120^{o}+\beta+\gamma)$

Aplicant el lema 2b

$$\sin^{2}(60^{o}+\gamma)+\sin^{2}(60^{o}+\beta)+2\cdot\sin(60^{o}+\gamma)\sin(60^{o}+\beta)\cos(120^{o}+\beta+\gamma)=\sin^{2}(120^{o}+\beta+\gamma)=\sin^{2}\alpha$$

Aleshores,

$$\overline{LN}=64R^{2}\sin^{2}\beta\sin^{2}\gamma\sin^{2}\alpha$$

Per simetria de la fórmula:

$$\overline{LM}=64R^{2}\sin^{2}\alpha\sin^{2}\beta\sin^{2}\gamma$$
$$\overline{MN}=64R^{2}\sin^{2}\alpha\sin^{2}\beta\sin^{2}\gamma$$

Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{LMN}$ és equilàter.

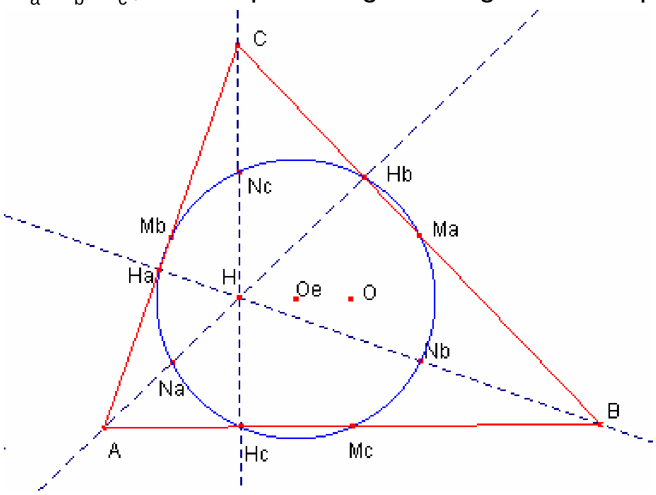
# La circumferència d'Euler.

Donat qualsevol triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ existeix la circumferència d'Euler que conté els següents 9 punts:

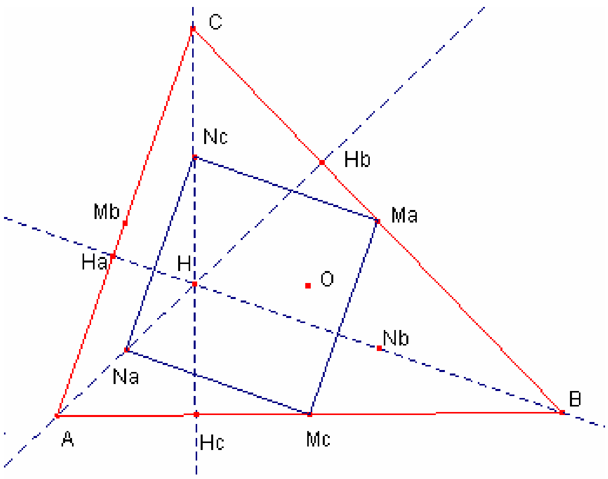
$H_a, H_b, H_c$, els tres peus de les altures del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$M_a, M_b, M_c$, els tres punts mig dels costats del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$N_a, N_b, N_c$, els tres punts mig dels segments compresos entre els vèrtexs i l'ortocentre.




Demostració:




Siguen H l'ortocentre del triangle i O el circumcentre del triangle.

Els triangles $\overset{\Delta}{BM_aM_c}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ són semblants i la raó de semblança és $\frac{1}{2}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{HN_aN_c}$, $\overset{\Delta}{HAB}$ són semblants i la raó de semblança és $\frac{1}{2}$.

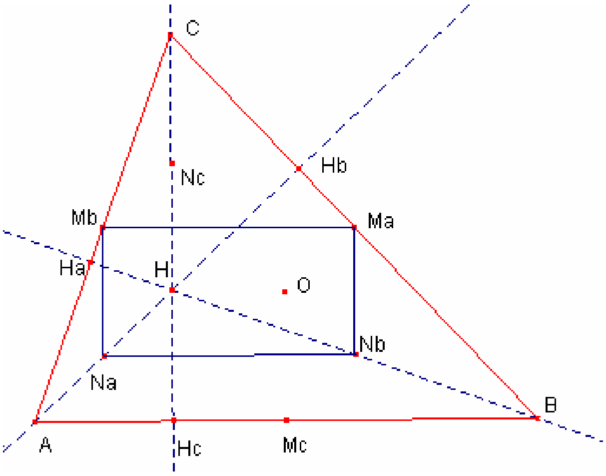
Aleshores $\overline{N_aN_c} = \overline{M_aM_c}$ i són paral· lels.

Els triangles $\overset{\Delta}{CN_cM_a}$, $\overset{\Delta}{CHB}$ són semblants i la raó de semblança és $\frac{1}{2}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{AN_aM_c}$, $\overset{\Delta}{AHB}$ són semblants i la raó de semblança és $\frac{1}{2}$.

Aleshores, $\overline{N_aM_c} = \overline{M_aN_c}$ i són paral· lels.

Per altra banda, $\overline{BH}$ és perpendicular a $\overline{AC}$, per tant, $\overline{N_cM_a}$ és perpendicular a $\overline{M_aM_c}$
Per tant, $N_aM_cM_aN_c$ és un rectangle.
Aleshores el rectangle $N_aM_cM_aN_c$ està inscrit en una circumferència de diàmetre $\overline{N_aM_a} = \overline{N_cM_c}$



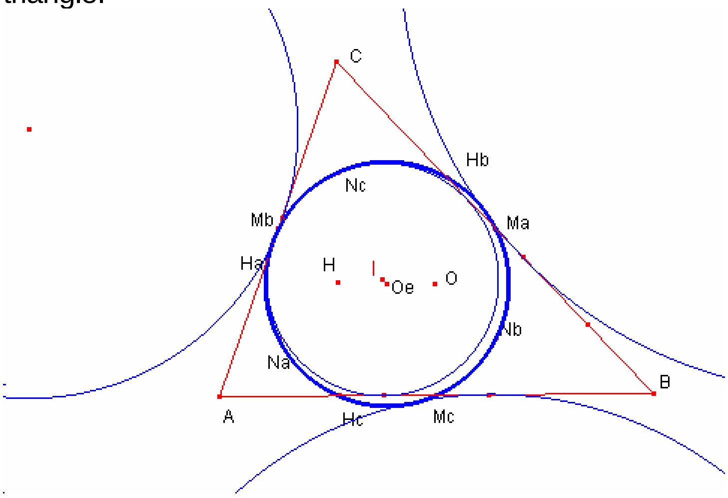

Anàlogament provaríem que $N_aM_bM_aN_b$ és un rectangle que està inscrit en la circumferència de diàmetre $\overline{N_aM_a}$ .

Com que $\angle N_aH_bM_a = 90^o$ , $H_b$ pertany a la circumferència de diàmetre $\overline{N_aM_a}$
Anàlogament $H_a, H_c$ pertanyen a la mateixa circumferència.

Propietat:
El centre de la circumferència d'Euler és el punt mig entre l'ortocentre i el circumcentre del triangle.

Propietat
El radi de la circumferència d'Euler és la meitat del radi de la circumferència circumscrita al triangle.

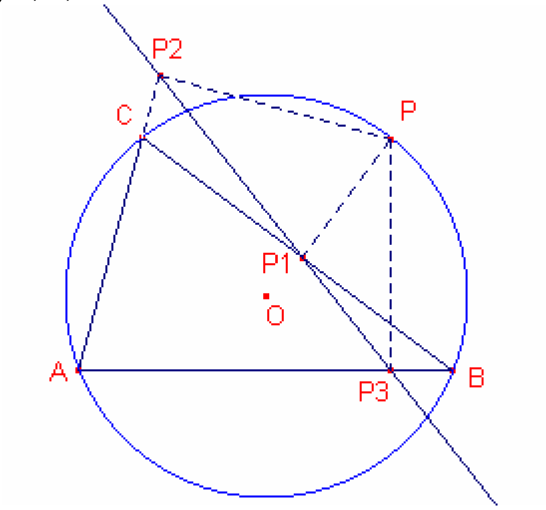
Propietat:
La circumferència d'Euler és tangent a les circumferències inscrita i exinscrites al triangle.



# La recta de Simson

## Teorema: La recta de Simson

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
Siga P un punt del plànol.
Siguen $P_1, P_2, P_3$, les projeccions del punt P sobre els costats (o les rectes que formen els costats) a, b, c.

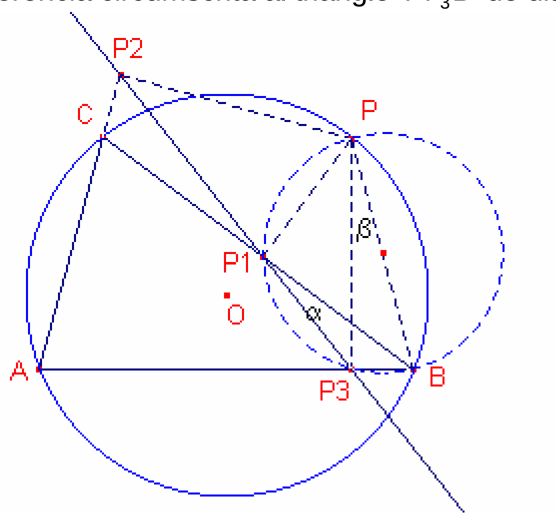



Aleshores:

P pertany a la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ si i només si els punts $P_1, P_2, P_3$ estan alineats.

Demostració:
$(\Rightarrow)$
Suposem que el punt P està en la circumferència circumscrita en l'arc BC que no conté A. Els altres casos es demostrarien canviant de nom els vèrtexs
Siguen $P_1, P_2, P_3$, les projeccions del punt P sobre els costats a, b, c (o les rectes que formen els costats).

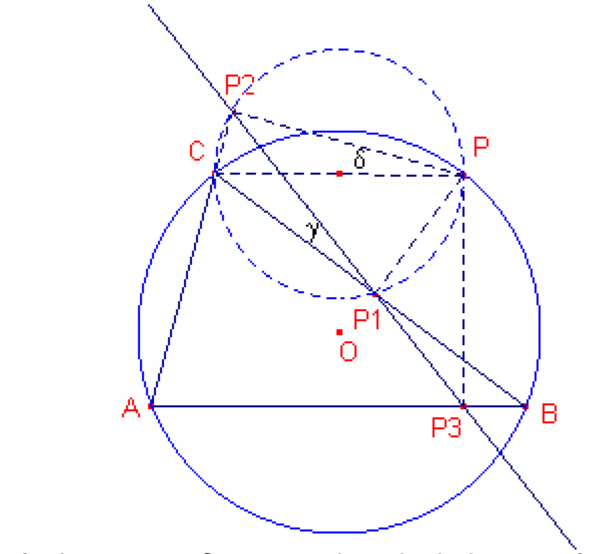
Considerem la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{PP_3B}$ de diàmetre $\overline{BP}$, per ser




l'angle $\angle PP_3B = 90^o$
El quadrilàter $BPP_1P_3$ és cíclic, perquè, $\angle PP_1P_3 = 90^o$,
Considerem els angles $\alpha = \angle BP_1P_3$, $\beta = \angle BPP_3$
Aleshores, $\alpha = \beta$ per ser inscrits i abraçar el mateix arc.

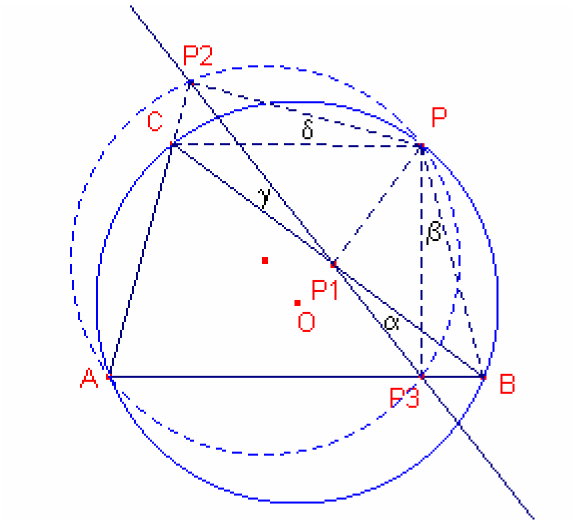
El quadrilàter $PP_2CP_1$ és cíclic per ser $\angle PP_2C = \angle CP_1P = 90^o$

Considerem els angles $\gamma = \angle CP_1P_2$, $\delta = \angle CPP_2$




Aleshores, $\gamma = \delta$ per ser inscrits i abraçar el mateix arc.

Considerem la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.




P pertany a la circumferència circumscrita si i només si $\angle CPB = 180^o - A$

El quadrilàter $PP_2AP_3$ és cíclic per ser $\angle PP_2A = \angle AP_3P = 90^o$

Aleshores, $\angle P_2PP_3 = 180^o - A$

Aleshores, $\angle CPB = \angle P_2PP_3 = 180^o - A$ (1)

Restant a la igualtat (1) l'angle $\angle CPP_3$ tindríem que $\beta = \delta$.

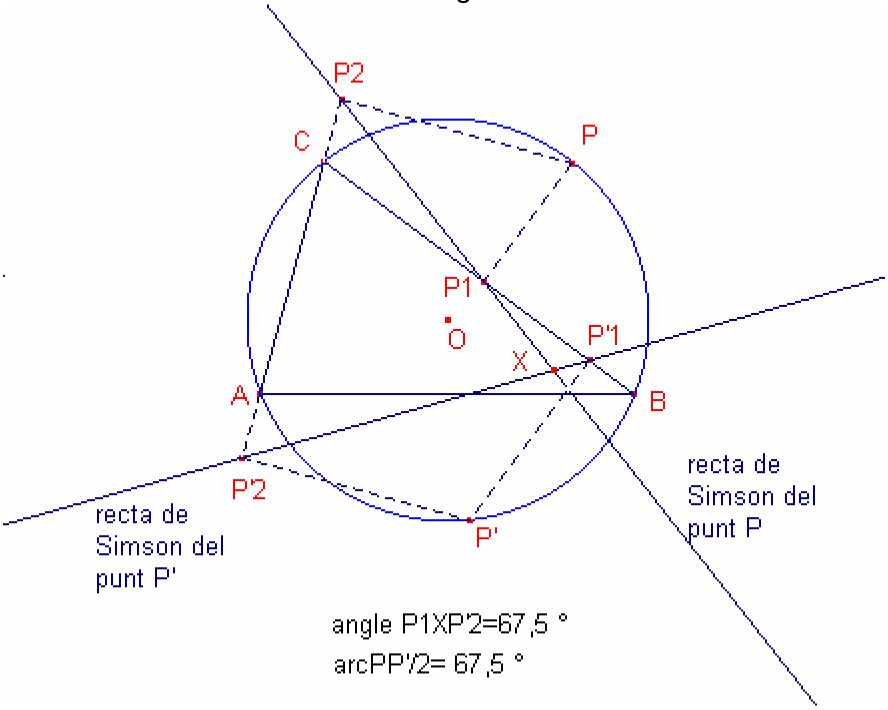
Aleshores, $\alpha = \gamma$, per tant, els punts $P_1, P_2, P_3$ estan alineats ja que $C, P_1, B$ estan alineats.

$(\Leftarrow)$

Si els punts $P_1, P_2, P_3$ estan alineats invertint l'ordre de la demostració anterior podem concloure que P pertany a la circumferència circumscrita del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

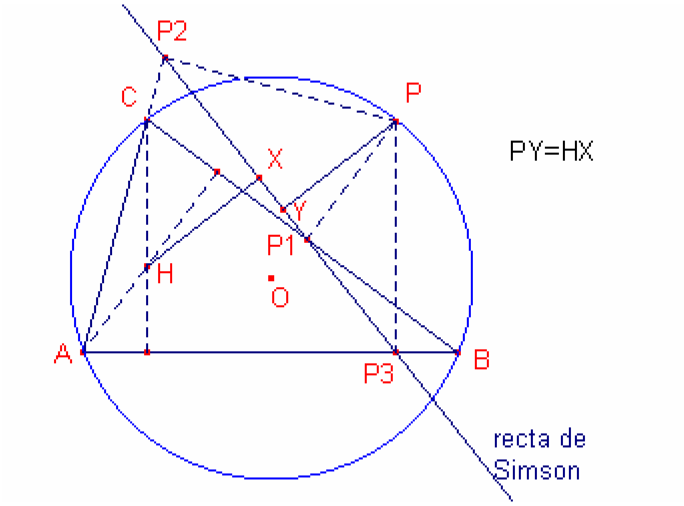
## Teorema

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
Siga el punt P P' de la circumferència circumscrita al triangle.
L'angle de les recteds de Simson dels punts P, P' mesura la meitat de l'arc PP' de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.




## Teorema

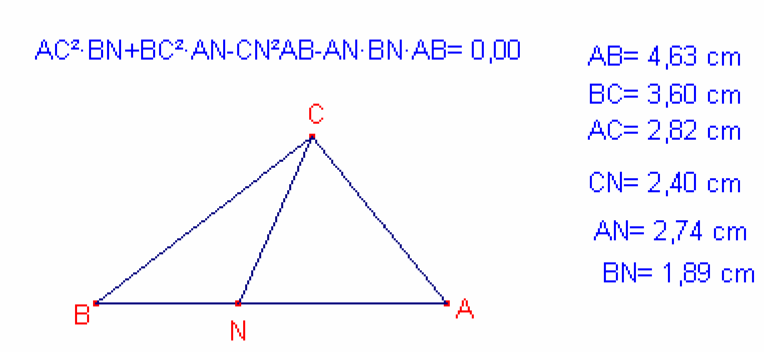
Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
Siga el punt P de la circumferència circumscrita al triangle.
La recta de Simson del punt P equidista del punt P i de l'ortocentre H del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



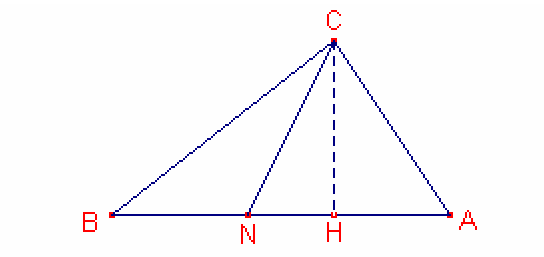
## Teorema de Stewart

Siga un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
Siga N un punt qualsevol sobre el costat $\overline{AB}$
Aleshores:

$$\overline{AC}^2\cdot\overline{BN}+\overline{BC}^2\cdot\overline{AN}-\overline{CN}^2\cdot\overline{AB}-\overline{AN}\cdot\overline{BN}\cdot\overline{AB}=0$$




Demostració:




Siga $\overline{CH}$ l'altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Provem que: $a^2=\overline{CN}^2+\overline{BN}^2+2\overline{BN}\cdot\overline{NH}$

Apliquem el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{CBH}$ $a^2=\left(\overline{BN}+\overline{NH}\right)^2+\overline{CH}^2$

Apliquem el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{CNH}$ $\overline{CN}^2=\overline{NH}^2+\overline{CH}^2$

Aïllant $\overline{CH}^2$ de les dues igualtats i igualant:

$$a^2-\left(\overline{BN}+\overline{NH}\right)^2=\overline{CN}^2-\overline{NH}^2$$

Simplificant: $a^2=\overline{CN}^2+\overline{BN}^2+2\overline{BN}\cdot\overline{NH}$ (1)

Anàlogament: $b^2=\overline{CN}^2+\overline{NA}^2-2\overline{NA}\cdot\overline{NH}$ (2)

Multiplicant (1) per $\overline{NA}$

$$\overline{NA}\cdot a^2=\overline{NA}\cdot\overline{CN}^2+\overline{NA}\cdot\overline{BN}^2+2\overline{BN}\cdot\overline{NA}\cdot\overline{NH} \quad (3)$$

Multiplicant (2) per $\overline{BN}$

$$\overline{BN}\cdot b^2=\overline{BN}\cdot\overline{CN}^2+\overline{BN}\cdot\overline{NA}^2-2\overline{BN}\cdot\overline{NA}\cdot\overline{NH} \quad (4)$$

Sumant (3) i (4)

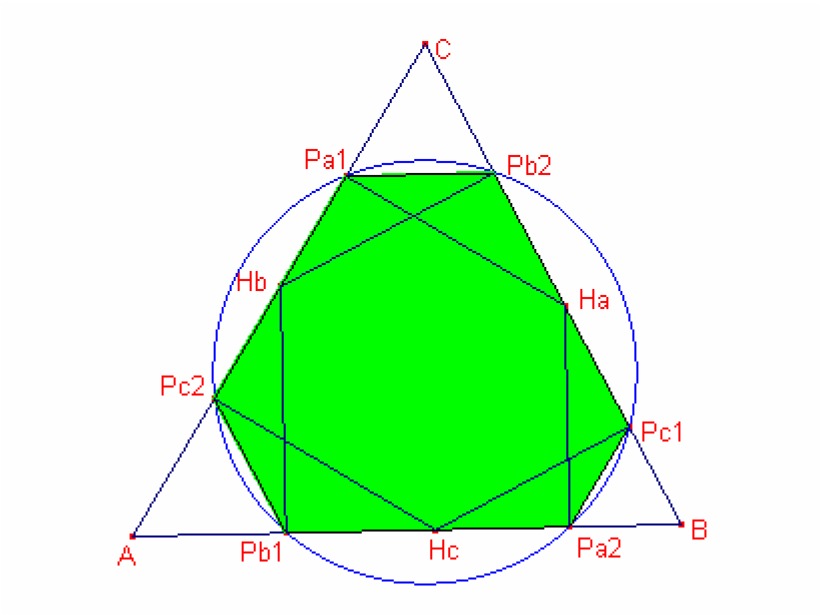
$$\overline{AN}\cdot a^2+\overline{BN}\cdot b^2=\overline{AN}\cdot\overline{CN}^2+\overline{AN}\cdot\overline{BN}^2+\overline{BN}\cdot\overline{CN}^2+\overline{BN}\cdot\overline{AN}^2=$$
$$=\overline{CN}^2\left(\overline{AN}+\overline{BN}\right)+\overline{AN}\cdot\overline{BN}\left(\overline{AN}+\overline{BN}\right)$$

Simplificant ($\overline{AN}+\overline{BN}=\overline{AB}$)

$$\overline{AC}^2\cdot\overline{BN}+\overline{BC}^2\cdot\overline{AN}-\overline{CN}^2\cdot\overline{AB}-\overline{AN}\cdot\overline{BN}\cdot\overline{AB}=0$$

## Teorema de E. Catalan (1814-1894). Circumferència de Taylor.

Si els peus de les altures d'un triangle les projectem sobre els altres costats, s'obtenen 6 punts que formen un hexàgon inscrit en una circumferència.



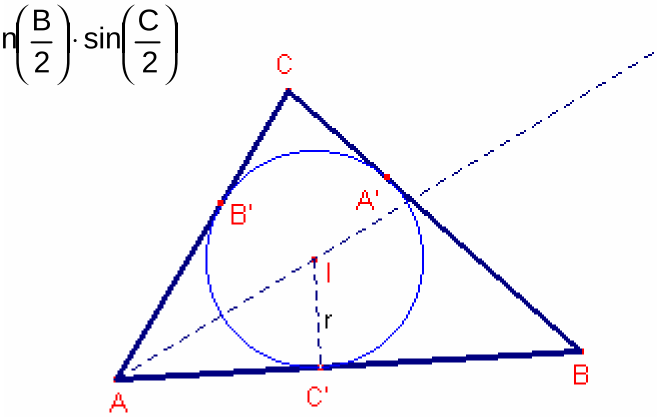
# Set teoremes sobre radis.

## Teorema 1:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Siguen r i R els radis de les circumferències inscrita i circumscrita, respectivament.

Aleshores: $\frac{r}{R} = 4 \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{B}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{C}{2}\right)$

Demostració:




Sabem que els radis de la circumferència inscrita i de la circumscrita en funció del costats són:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \qquad R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}, \text{ on } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Aleshores; $\frac{r}{R} = \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$ (1)

Pel teorema del cosinus: $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc} = \frac{p(p-a)}{2bc}$

$$\sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1-\cos A}{2} = \frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc} =$$

$$= \frac{a^2+(b-c)^2}{4bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc} = \frac{(p-c)(p-b)}{bc},$$

per tant, $\sin\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

Anàlogament:, $\sin\left(\frac{B}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$ $\sin\left(\frac{C}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$

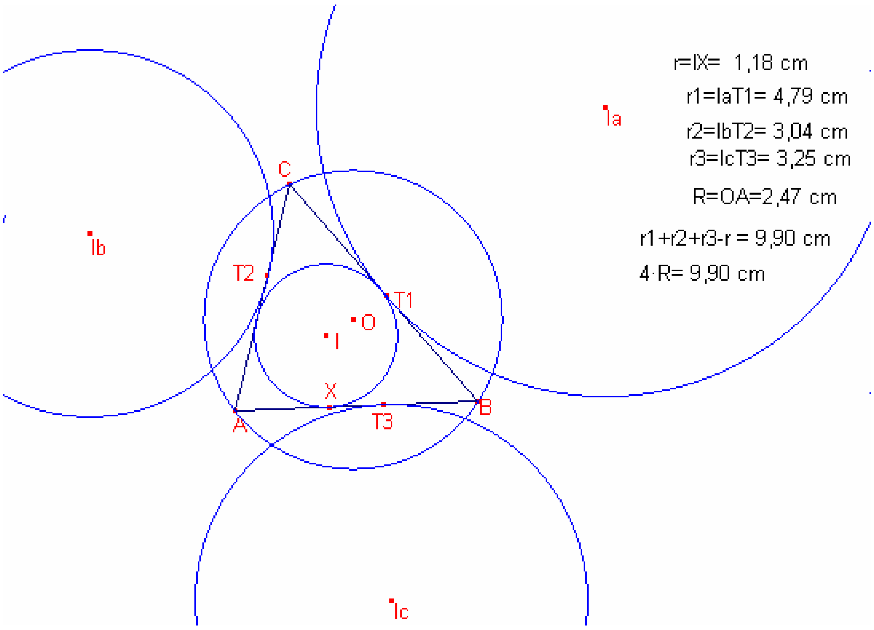
$$4 \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{B}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{C}{2}\right) = 4\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} =$$

$$= 4 \cdot \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} \qquad (2)$$

De (1) i (2) podem concloure que $\frac{r}{R} = 4 \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{B}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{C}{2}\right)$

## Teorema 2

En qualsevol triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ els radis de la circumferència inscrita r, circumscrita R i els 3 radis de les circumferències exinscrites tenen la següent relació:
$r_a + r_b + r_c - r = 4R$




Demostració:
A partir de la proporció entre els radis de les circumferències inscrita i exinscrites obtenim les fórmules dels radis de les exinscrites en funció dels costats:

$$r_a = \frac{r\cdot p}{p-a}, \quad r_b = \frac{r\cdot p}{p-b}, \quad r_c = \frac{r\cdot p}{p-a}, \quad \text{on } p = \frac{a+b+c}{2}$$

També sabem que, $r\cdot p = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $R = \dfrac{abc}{4r\cdot p}$

Calculem $\dfrac{r_a}{R} + \dfrac{r_b}{R} + \dfrac{r_c}{R} - \dfrac{r}{R}$

$$\frac{r_a}{R} + \frac{r_b}{R} + \frac{r_c}{R} - \frac{r}{R} = \frac{\frac{rp}{p-a}}{\frac{abc}{4rp}} + \frac{\frac{rp}{p-b}}{\frac{abc}{4rp}} + \frac{\frac{rp}{p-c}}{\frac{abc}{4rp}} - \frac{r}{\frac{abc}{4rp}} =$$

$$= \frac{4r^2p^2}{(p-a)abc} + \frac{4r^2p^2}{(p-b)abc} + \frac{4r^2p^2}{(p-c)abc} - \frac{4r^2p}{abc} =$$

$$= \frac{4}{abc}\left(p(p-b)(p-c) + p(p-a)(p-c) + p(p-a)(p-b) - (p-a)(p-b(p-c)\right) =$$

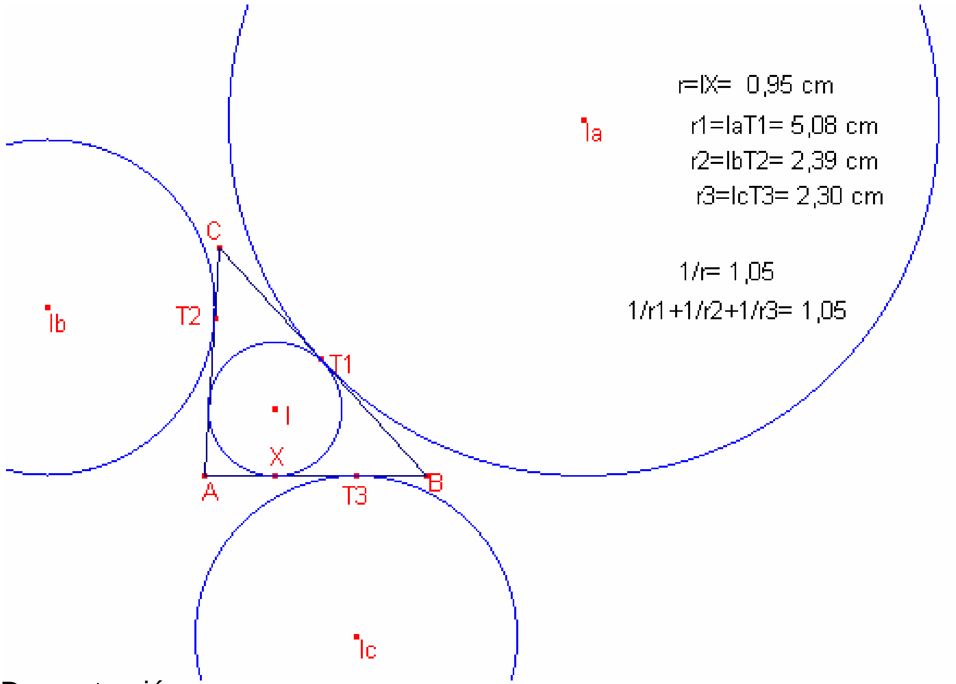
$$= \frac{4}{abc}abc = 4$$

Aleshores, $r_a + r_b + r_c - r = 4R$

## Teorema 3:

En qualsevol triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ la relació dels radis de la circumferència inscrita, i de les exinscrites és la següent:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$$




Demostració

A partir de la proporció entre els radis de la circumferència inscrita i les exinscrites obtenim:

$$\frac{r}{r_a}=\frac{p-a}{p},\quad \frac{r}{r_b}=\frac{p-b}{p},\quad \frac{r}{r_c}=\frac{p-c}{p},\quad \text{on } p=\frac{a+b+c}{2}$$

$$\frac{r}{r_a}+\frac{r}{r_b}+\frac{r}{r_c}=\frac{p-a}{p}+\frac{p-b}{p}+\frac{p-c}{p}=1$$

Dividint l’expressió per r:

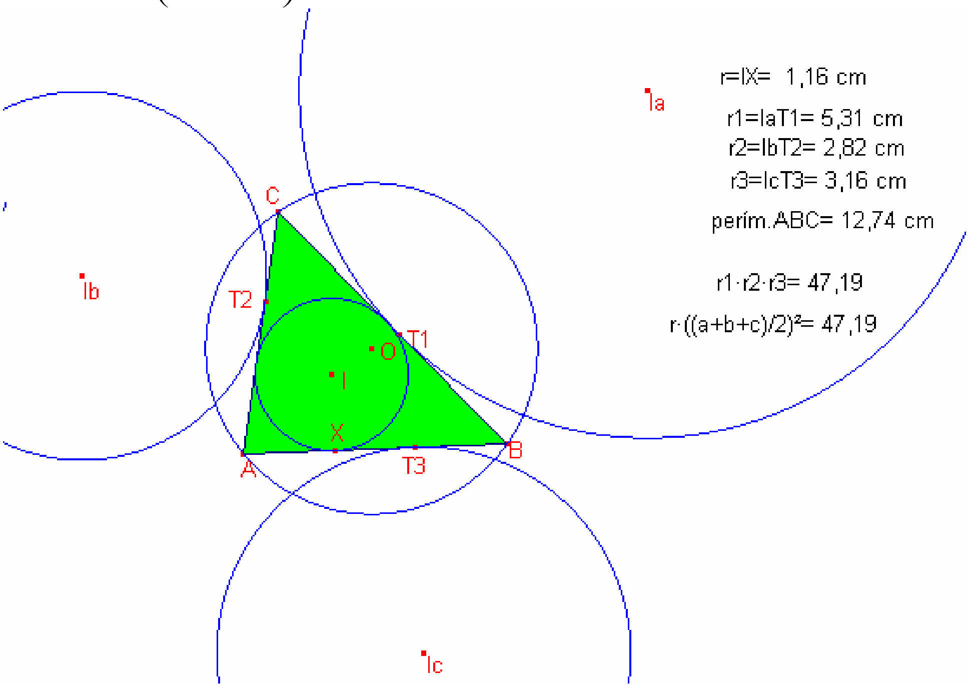
$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$$

**Nota:** Una altra fórmula de radis: $\frac{r}{r_a}+\frac{r}{r_b}+\frac{r}{r_c}=1$

## Teorema 4:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siguen r el radi de la circumferència inscrita i $r_a$ $r_b$ $r_c$ els radis de les circumferències exinscrites.
Aleshores:

$$r_a \cdot r_b \cdot r_c = r\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 = rp^2$$




Demostració:
A partir de la proporció entre els radis de les circumferències inscrita i exinscrites obtenim les fórmules dels radis de les exinscrites en funció dels costats:

$$r_a = \frac{r\cdot p}{p-a}, \quad r_b = \frac{r\cdot p}{p-b}, \quad r_c = \frac{r\cdot p}{p-a}, \quad \text{on } p = \frac{a+b+c}{2}$$

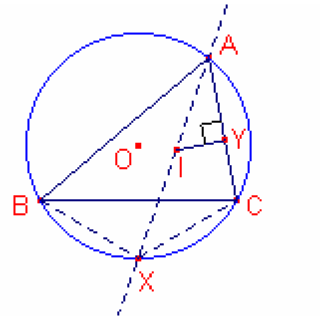
El radi de la circumferència inscrita en funció dels costats és: $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

$$r_a \cdot r_b \cdot r_c = \frac{r^3 p^3}{(p-a(p-b)(p-c)} = \frac{r\cdot r^2 \cdot p^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{r\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}p^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} = rp^2$$

## Teorema d'Euler: Distància entre l'incentre i el circumcentre

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i siguen R el radi de la circumferència circumscrita(de centre O) i r el radi de la circumferència inscrita(de centre I).
Aleshores:

$\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$




Demostració:
Siga $d = \overline{OI}$.
Siga $\overline{AX}$ la bisectriu a l'angle A.
Notem que X és el punt mig de l'arc BC.

Vegem que el triangle $\overset{\Delta}{BIX}$ és isòsceles.

$\angle CBX = \frac{A}{2}, \quad \angle IBC = \frac{B}{2}$

$\angle IBX = \frac{A+B}{2}, \quad \angle BIX = \frac{A+B}{2}$, per tant $\overset{\Delta}{BIX}$ és isòsceles.

Aleshores: $\overline{IX} = \overline{XB} = \overline{XC}$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABX}$ $\quad \frac{\overline{XB}}{\sin\frac{A}{2}} = 2R \quad \Rightarrow \quad \overline{XB} = 2R \cdot \sin\frac{A}{2}$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AIY}$ $\quad \overline{IA} = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$

Apliquem la potencia del punt I respecte de la circumferència circumscrita al triangle

$$R^2 - d^2 = \overline{IA} \cdot \overline{IX} = 2R \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} = 2Rr$$

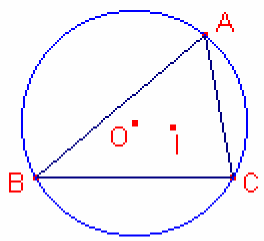
Aleshores, $\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$

**Nota:** $R^2 - 2Rr \geq 0$, Aleshores tenim la desigualtat, $R \geq 2r$.

## Teorema 6:

Siguen r, R els radis de les circumferències inscrita i circumscrita d'un triangle qualsevol $\overset{\Delta}{ABC}$ i siga $d = \overline{OI}$ la distància entre els centres de les dues circumferències anteriors.
Aleshores:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R-d} + \frac{1}{R+d}$$



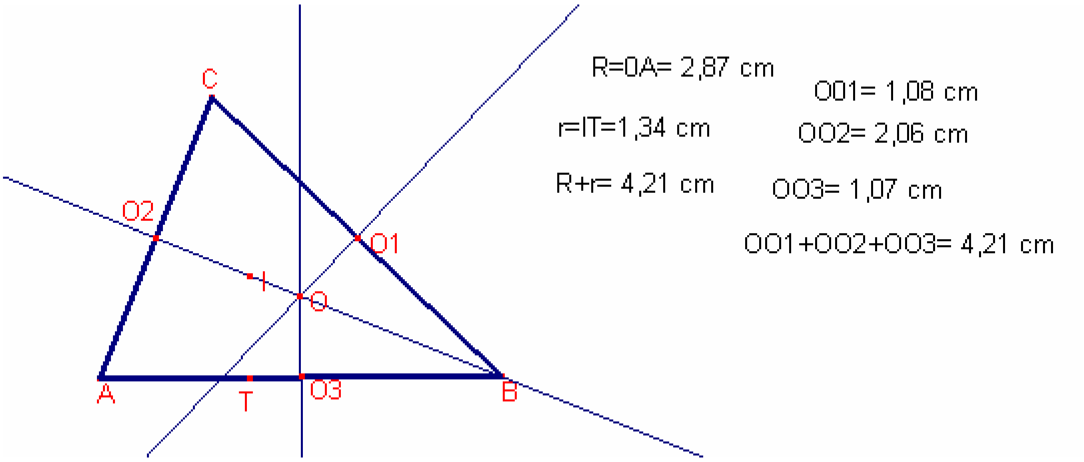

Demostració:
Pel teorema d'Euler sobre la distància entre l'incentre i el circumcentre:

$d^2 = \overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$ on R és el radi de la circumferència circumscrita i r el radi de la circumferència inscrita.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R-d} + \frac{1}{R+d} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{r} = \frac{2R}{(R-r)(R+r)} \quad \Leftrightarrow \quad 2rR = R^2 - d^2 \quad \Leftrightarrow \quad d^2 = R^2 - 2Rr$$

## Teorema de Carnot

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ acutangle. Siguen els punts O, I el circumcentre i l'incentre del triangle, respectivament. Siguen R, r els radis de les circumferències circumscrita i inscrita al triangle, respectivament.
Siguen $O_1, O_2, O_3$ els punts mig dels costats.
Aleshores: $\overline{OO_1} + \overline{OO_2} + \overline{OO_3} = R + r$




Demostració:

Siga O el centre de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de radi R.

Siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siguen $O_1, O_2, O_3$ els punts mig dels costats a, b, c, respectivament.

$\text{Àrea}\,\overset{\Delta}{ABC} = rp$, on p és el semiperímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\text{Àrea}\,\overset{\Delta}{ABC} = \text{Àrea}\,\overset{\Delta}{ABO} + \text{Àrea}\,\overset{\Delta}{BCO} + \text{Àrea}\,\overset{\Delta}{ACO}$.
Per tant, $2 \cdot rp = a \cdot \overline{OO_1} + b \cdot \overline{OO_2} + c \cdot \overline{OO_3}$ (1)

El quadrilàter $AO_2OO_3$ és cíclic ja que $\angle AO_3O = \angle AO_2O = 90^o$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{AO_2O_3}$ són semblants i la raó de semblança és 2:1

Per tant el radi de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{AO_2O_3}$ és $\frac{R}{2}$

$\angle OO_2O_3 = 90^o - C$, $\angle OO_3O_2 = 90^o - B$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AO_2O_3}$,

$$\frac{\overline{OO_2}}{\sin(90^o - B)} = \frac{\overline{OO_3}}{\sin(90^o - C)} = 2\left(\frac{R}{2}\right).$$ Aleshores, $\overline{OO_2} = R \cdot \cos B$, $\overline{OO_3} = R \cdot \cos C$

Anàlogament, $\overline{OO_1} = R \cdot \cos A$

Sabem que:
$a = c \cdot \cos B + b \cdot \cos C$
$b = c \cdot \cos A + a \cdot \cos C$
$c = b \cdot \cos A + a \cdot \cos B$
Sumant les tres equacions:
$2p = (b + c)\cos A + (a + c)\cos B + (a + b)\cos C$

Multiplicant l'equació per R

$2pR = (b+c)R\cdot\cos A + (a+c)R\cdot\cos B + (a+b)R\cdot\cos C$

Aleshores:

$2pR = (b+c)\overline{OO_1} + (a+c)\overline{OO_2} + (a+b)\overline{OO_3}$ (2)

Sumant (1) i (2)

$2pr + 2pR = (a+b+c)\overline{OO_1} + (a+b+c)\overline{OO_2} + (a+b+c)\overline{OO_3}$

Simplificant:

$\overline{OO_1} + \overline{OO_2} + \overline{OO_3} = R + r$

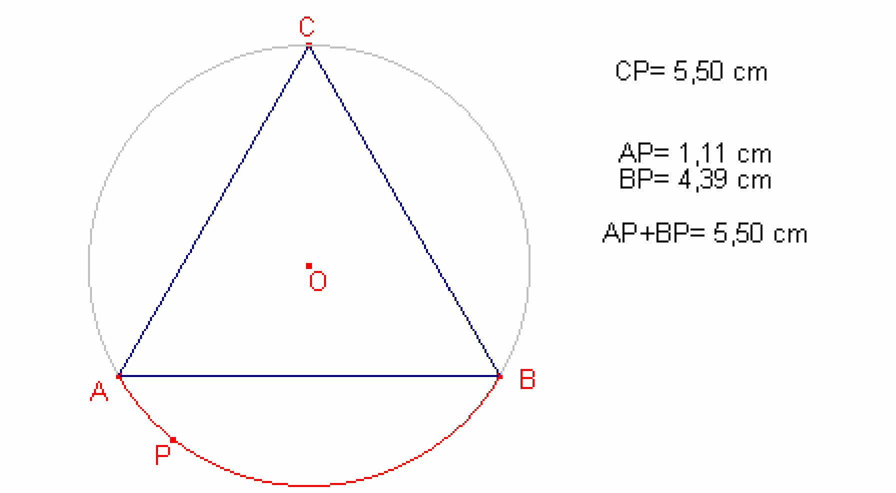
**Nota:** si A és obtusangle la fórmula és: $-\overline{OO_1} + \overline{OO_2} + \overline{OO_3} = R + r$

# Quatre teoremes sobre triangles equilàters

## Teorema 1:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga P un punt en l'arc menor de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Proveu que $\overline{CP} = \overline{AP} + \overline{BP}$




Solució:

Siga $a = \overline{AB}$ el costat del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$

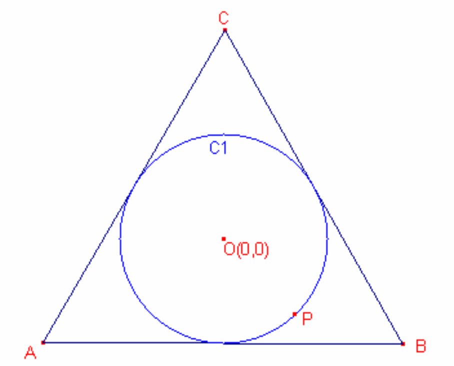
El quadrilàter APBC es inscrit en la circumferència circumscrita del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Aplicant el teorema de Ptolomeu:
$\overline{CP} \cdot \overline{AB} = \overline{AP} \cdot \overline{BC} + \overline{BP} \cdot \overline{AC}$
Per ser el triangle rectangle:
$\overline{CP} \cdot a = \overline{AP} \cdot a + \overline{BP} \cdot a$
Simplificant:
$\overline{CP} = \overline{AP} + \overline{BP}$.

## Teorema 2:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat a

Siga P un punt de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Aleshores:

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 = 5\left(\frac{a}{2}\right)^2$$




Solució:
Sense restar generalització podem suposar que a=1
Considerem el plànol cartesià, d'origen el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

Aleshores:
Les coordenades dels vèrtexs del triangle són:

$A\left(\frac{-1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, $B\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, $C\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

El radi de la circumferència inscrita és $\frac{\sqrt{3}}{6}$

L'equació de la circumferència inscrita és:

$$C_1 \equiv x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

Siga un punt P de la circumferència, $P\left(x,\pm\sqrt{\frac{1}{12}-x^2}\right)$

- Considerem el cas $P\left(x,\sqrt{\frac{1}{12}-x^2}\right)$

Calculem les distàncies del punt P als vèrtexs:

$$d(A,P)=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{12}-x^2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}$$

$$d(B,P)=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{12}-x^2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}$$

$$d(C,P)=\sqrt{x^2+\left(\sqrt{\frac{1}{12}-x^2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\sqrt{\frac{1}{12}-x^2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+x^2+\left(\sqrt{\frac{1}{12}-x^2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{5}{4}$$

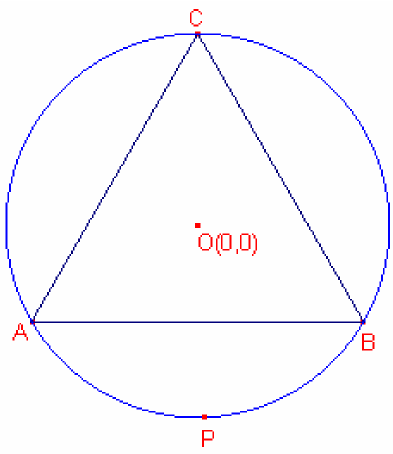
- El cas $P\left(x,-\sqrt{\frac{1}{12}-x^2}\right)$ és anàleg.

## Teorema 3:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat a.

Siga P un punt de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Aleshores:

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=2a^2$$




Solució:
Sense restar generalització podem suposar que a=1
Considerem el plànol cartesià, d'origen el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

Aleshores:
Les coordenades dels vèrtexs del triangle són:

$A\left(\frac{-1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, $B\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, $C\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

El radi de la circumferència circumscrita és $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

L'equació de la circumferència inscrita és:

$$C_1 \equiv x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

Siga un punt P de la circumferència, $P\left(x,\pm\sqrt{\frac{1}{3}-x^2}\right)$

- Considerem el cas $P\left(x,\sqrt{\frac{1}{3}-x^2}\right)$

Calculem les distàncies del punt P als vèrtexs:

$$d(A,P) = \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{3}-x^2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}$$

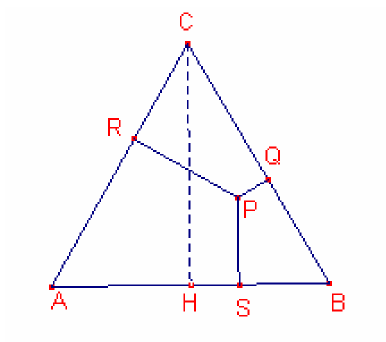
$$d(B,P) = \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{3}-x^2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}$$

$$d(C,P) = \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{3}-x^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\sqrt{\frac{1}{3}-x^2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + x^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{3}-x^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 2$$

- El cas $P\left(x,-\sqrt{\frac{1}{3}-x^2}\right)$ és anàleg.

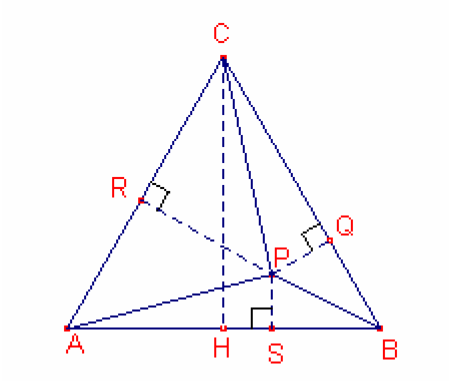
# Teorema de Vicenzo Viviani (1622-1703)




En un triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ la suma de les perpendiculars d'un punt P interior al triangle (o del triangle) als costats és igual a l'altura del triangle.

Demostració:

Siga $a=\overline{AB}$, el costat del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$




Considerem els triangles $\overset{\Delta}{ABP}$, $\overset{\Delta}{BCP}$, $\overset{\Delta}{ACP}$

$$\text{Àrea}\,\overset{\Delta}{ABC}=\text{Àrea}\,\overset{\Delta}{ABP}+\text{Àrea}\,\overset{\Delta}{BCP}+\text{Àrea}\,\overset{\Delta}{ACP}$$

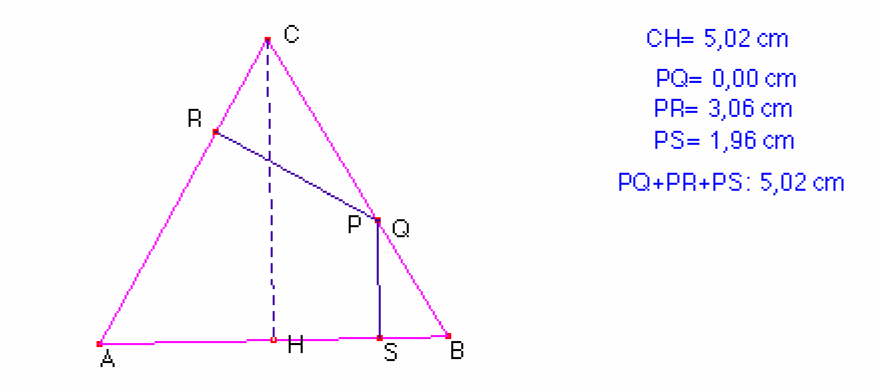
$$\frac{a\cdot\overline{CH}}{2}=\frac{a\cdot\overline{PS}}{2}+\frac{a\cdot\overline{PQ}}{2}+\frac{a\cdot\overline{PR}}{2}$$

Simplificant:

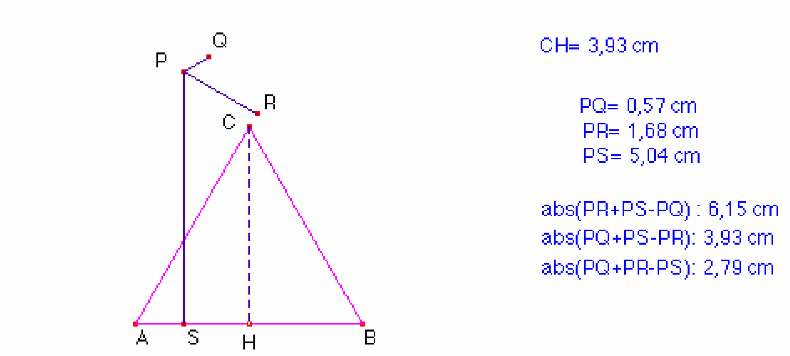
$\overline{CH}=\overline{PS}+\overline{PQ}+\overline{PR}$, la suma de les perpendiculars d'un punt P interior al triangle (o del triangle) als costats és igual a l'altura del triangle.

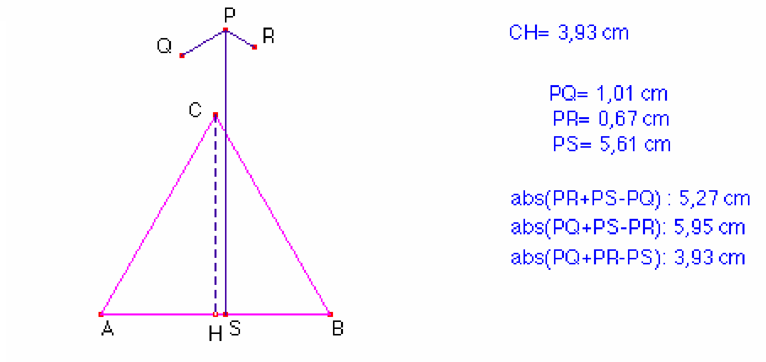
## Generalització:

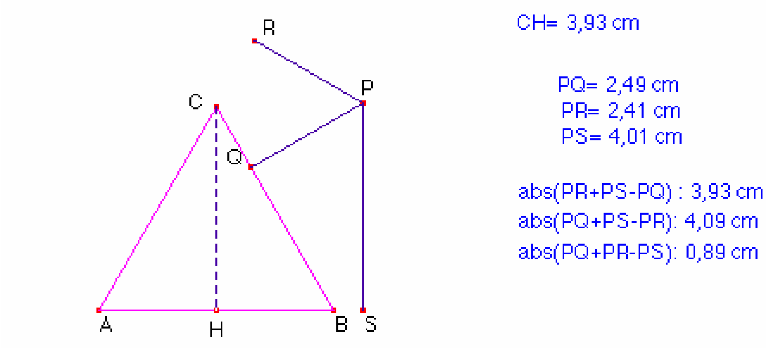
Si el punt P pertany al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ es té el mateix resultat.

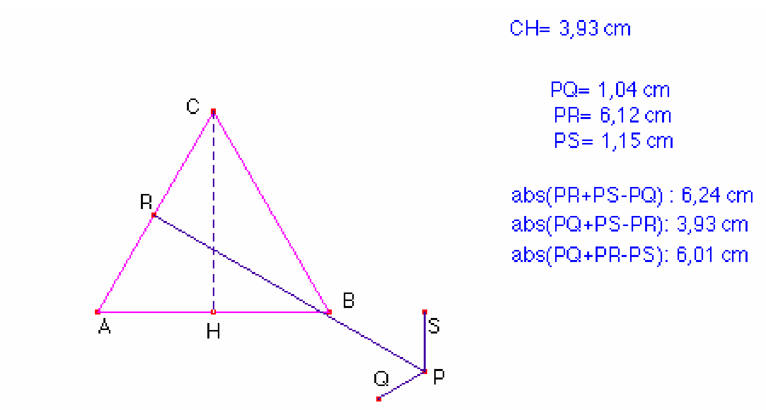


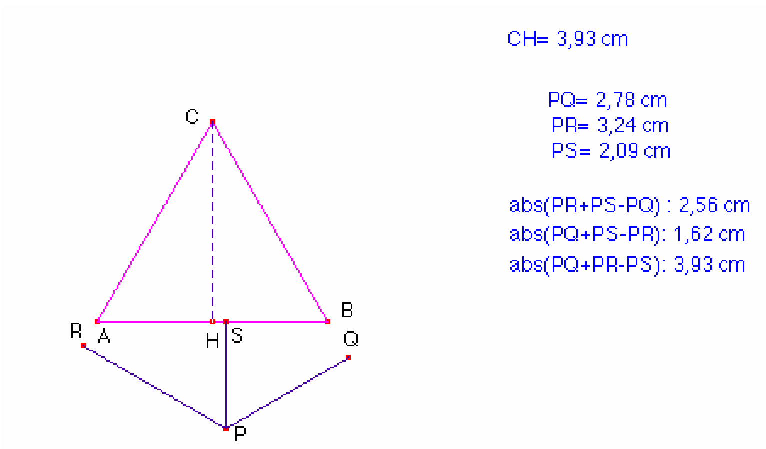
Si el punt P és exterior al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, depén de la regió on es trobe es té el següent resultat:

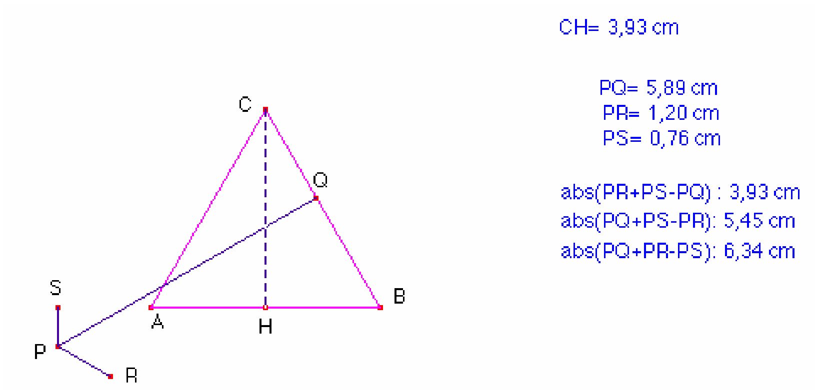


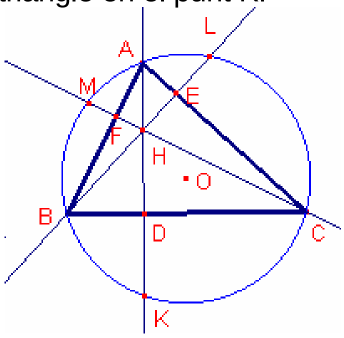

CH= 3,93 cm
PQ= 2,78 cm
PR= 3,24 cm
PS= 2,09 cm
abs(PR+PS-PQ) : 2,56 cm
abs(PQ+PS-PR): 1,62 cm
abs(PQ+PR-PS): 3,93 cm
C
B
R
A
H
S
Q
P


CH= 3,93 cm
PQ= 5,89 cm
PR= 1,20 cm
PS= 0,76 cm
abs(PR+PS-PQ) : 3,93 cm
abs(PQ+PS-PR): 5,45 cm
abs(PQ+PR-PS): 6,34 cm
C
Q
S
B
A
H
P
R

# Tres teoremes sobre l'ortocentre i l'altura.

## Teorema 1

En qualsevol $\overset{\Delta}{ABC}$ considerem la altura al vèrtex A i el peu de l'altura D.
Siga H el ortocentre del triangle.
L'altura al vèrtex A talla la circumferència circumscrita al triangle en el punt K.
Aleshores: $\overline{HD} = \overline{DK}$



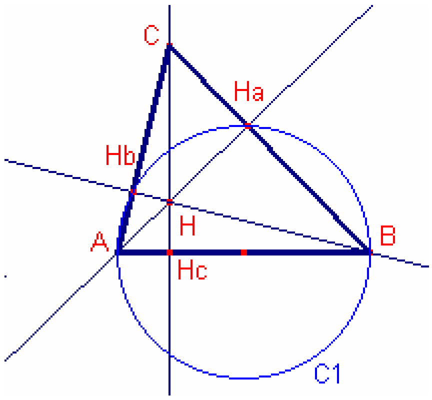

Demostració:
Considerem la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Podem notar que $\angle BAD = \angle FCB$ per ser angles sobre rectes perpendiculars.

$\angle BAK = \angle BCK$ per ser angles inscrits que abracen el mateix arc.

Aleshores els triangles $\overset{\Delta}{DHC}, \overset{\Delta}{DKC}$ són iguals perquè són rectangles, tenen un angle agut igual i un catet $\overline{DC}$ igual.
Aleshores, $\overline{HD} = \overline{DK}$
Anàlogament, $\overline{HE} = \overline{EL}$, $\overline{HF} = \overline{FM}$.

## Teorema 2:

Siga H l'ortocentre d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
El producte dels segments que cada altura queda dividida per l'ortocentre és igual en les tres altures.




Demostració:
Considerem la circumferència $C_1$ de diàmetre $\overline{AB}$.
Els punts $H_a, H_b$ pertanyen a la circumferència $C_1$.
Aplicant la potència del punt H (ortocentre) respecte de la circumferència $C_1$.
$\overline{AH} \cdot \overline{HH_a} = \overline{BH} \cdot \overline{HH_b}$
Anàlogament dibuixant la circumferència $C_2$ de diàmetre $\overline{AC}$ demostraríem que:
$\overline{AH} \cdot \overline{HH_a} = \overline{CH} \cdot \overline{HH_c}$

## Teorema 3:

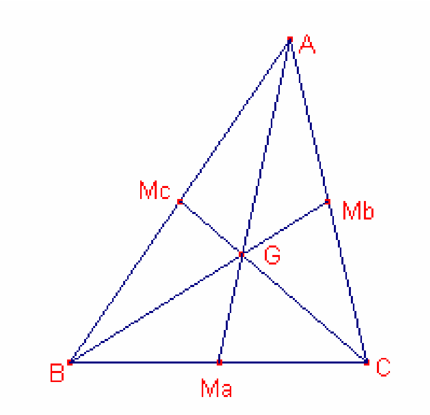
Donat un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Siga R el radi de la circumferència circumscrita al triangle.
Siga $h = \overline{AH_a}$ l'altura al costat a.
Aleshores:
$h = 2R \cdot \sin B \cdot \sin C$
Demostració:

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $\dfrac{c}{\sin C} = 2R$

Aplicant raons trigonomètriques $h = c \cdot \sin B$
Aleshores, $h = 2R \cdot \sin B \cdot \sin C$

# Tres teoremes sobre el baricentre i les mitjanes.

## Teorema 1




En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, siga G el baricentre.
Es compleix la següent igualtat:

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=3\left(\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2\right)$$

Demostració:

Les mesures de les mitjanes són:

$$m_A=\overline{AM_a}=\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$$

$$m_B=\overline{BM_b}=\frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2} \quad m_C=\overline{CM_c}=\frac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2}$$

Per la propietat del baricentre $\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AM_a}$, $\overline{BG}=\frac{2}{3}\overline{BM_b}$, $\overline{CG}=\frac{2}{3}\overline{AM_b}$

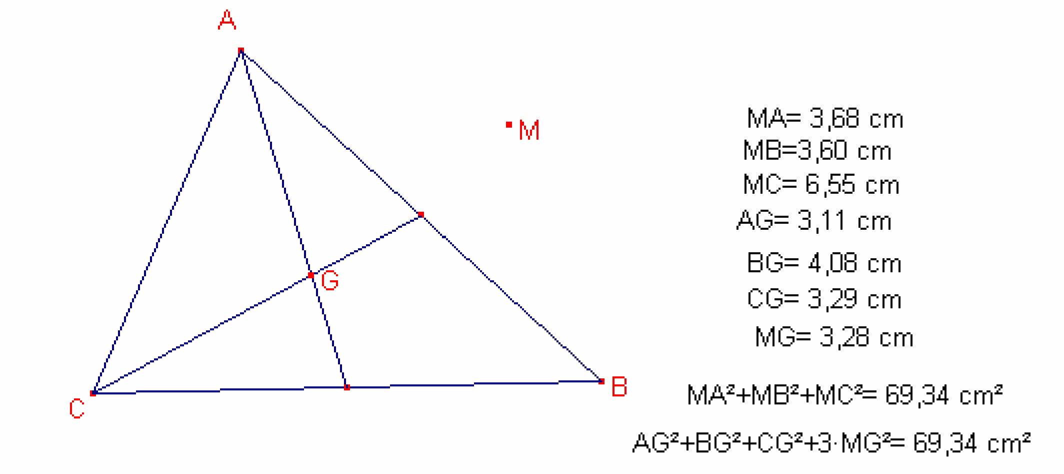
$$\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2=\left(\frac{2}{3}\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\frac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{9}\left(2b^2+2c^2-a^2+2a^2+2c^2-b^2+2a^2+2b^2-c^2\right)=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

## Propietat del baricentre 2.

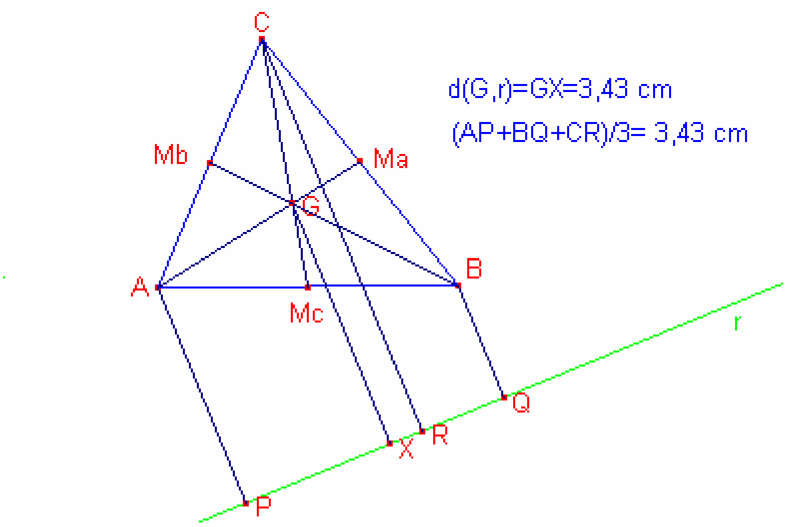
Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i G el seu baricentre.
Siga M un punt qualsevol del plànol.
Aleshores:

$$\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2=\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2+3\cdot\overline{MG}^2$$



## Teorema 3

La distància del baricentre d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ a una recta r exterior al triangle és igual a la mitjana aritmètica de les distàncies dels vèrtexs a la recta.

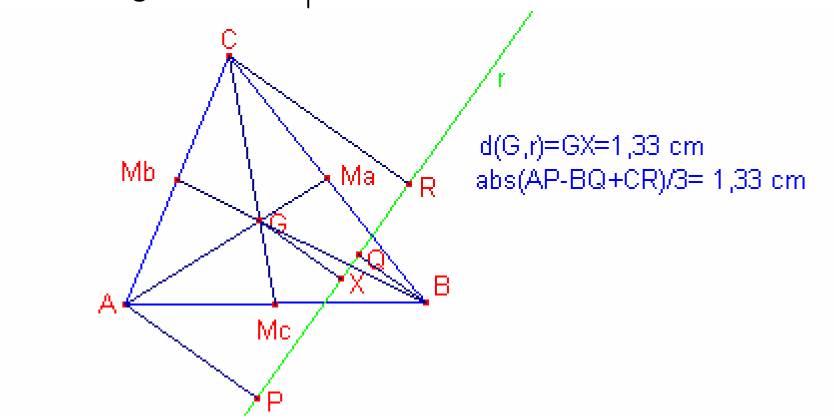



Si la recta r talla el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, aleshores es dóna una de les tres igualtats:

$$d(G,r)=\left|\frac{d(A,r)+d(B,r)-d(C,r)}{3}\right|$$

$$d(G,r)=\left|\frac{d(A,r)-d(B,r)+d(C,r)}{3}\right|$$

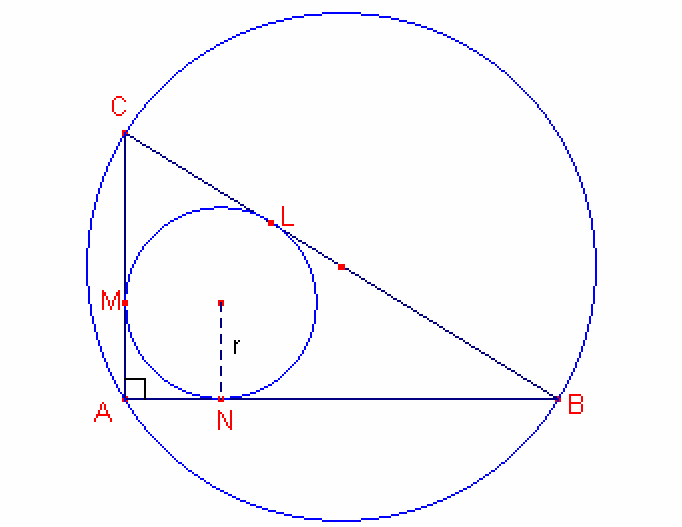
$$d(G,r)=\left|\frac{-d(A,r)+d(B,r)+d(C,r)}{3}\right|$$



# Tres teoremes sobre triangles rectangles.

## Teorema 1:

La suma dels catets d'un triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $\hat{A} = 90^{\circ}$ és igual a la suma dels diàmetres de les circumferències inscrites i circumscrites.




Demostració:
Siga D el diàmetre de la circumferència circumscrita. Siga d el diàmetre de la circumferència inscrita.

Siga $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ el semiperímetre.

$\overline{AM} = \overline{AN} = p - a$

$\overline{BL} = \overline{BN} = p - b$

Per ser $\hat{A} = 90^{\circ}$ el diàmetre de la circumferència circumscrita és la hipotenusa del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $D = a$

El radi de la circumferència inscrita és $r = p - a$

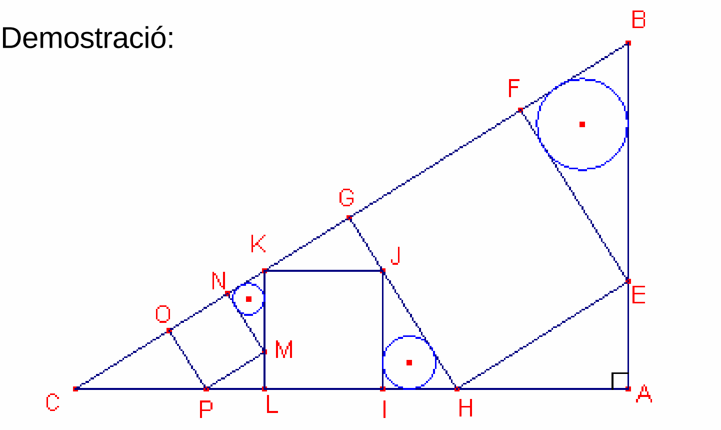
$D + d = a + 2(p - a) = 2p - a = b + c$

Per tant, la suma dels diàmetres de les circumferències inscrita i circumscrita és igual a la suma dels catets d'un triangle rectangle.

## Teorema 2:

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, A=90º.
Sobre el que fem la construcció següent:
(els polígons són quadrats) i les circumferències inscrites als triangles.
Aleshores el radi de la circumferència mitjana és la mitjana geomètrica dels radis de les altres dues circumferències, és a dir, $R_{mitjana} = \sqrt{R_{gran} \cdot R_{petita}}$

Demostració:




Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{FEB}, \overset{\Delta}{IHJ}, \overset{\Delta}{NMK}$ són semblants.
Siga $x_1$ el costat del quadrat EFGH. Siga $x_2$ el costat del quadrat IJKL. Siga $x_3$ el costat del quadrat MNOP. Siguen $y_1 = \overline{BE}, y_2 = \overline{HJ}, y_3 = \overline{KL}$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{IHJ}$ són semblants, aleshores, $\frac{y_2}{x_2} = \frac{a}{b}$ (1)

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{GKJ}$ són semblants, aleshores, $\frac{x_1 - y_2}{x_2} = \frac{c}{a}$ (2)

De (1) i (2) tenim que: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{bc + a^2}{ab}$

Els triangles $\overset{\Delta}{FEB}, \overset{\Delta}{IHJ}$ són semblants i la raó de semblança és $\frac{x_1}{x_2} = \frac{bc + a^2}{ab} = k$

Per tant, $\frac{R_{gran}}{R_{mitjana}} = k$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{NMK}$ són semblants, aleshores, $\frac{y_3}{x_3} = \frac{a}{b}$ (3)

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{LMP}$ són semblants, aleshores, $\frac{x_2 - y_3}{x_3} = \frac{c}{a}$ (4)

De (3) i (4) tenim que: $\frac{x_2}{x_3} = \frac{bc + a^2}{ab}$

Els triangles $\overset{\Delta}{IHJ}, \overset{\Delta}{NMK}$ són semblant i la raó de semblança és $\frac{x_2}{x_3} = \frac{bc + a^2}{ab} = k$

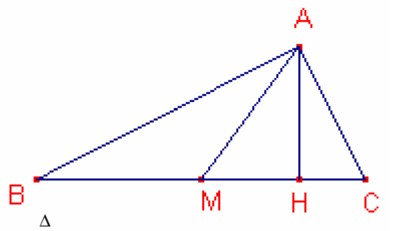
Per tant, $\frac{R_{mitjana}}{R_{petita}} = k$

Aleshores, $\frac{R_{gran}}{R_{mitjana}} = \frac{R_{mitjana}}{R_{petita}}$, o bé, $R_{mitjana} = \sqrt{R_{gran} \cdot R_{petita}}$

## Teorema 3:

a) La mitjana d'un triangle rectangle traçada a la hipotenusa és igual a la meitat de la hipotenusa.

b) Si un triangle una de les mitjanes és mesura la meitat del costat sobre la que està traçada, el triangle és rectangle.




Demostració:

a)

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $\hat{A} = 90^o$

Siguen la mitjana $\overline{AM}$ i l'altura $\overline{AH}$

$\overline{AM}^2 = \overline{MH}^2 + \overline{AH}^2 =$ (ja que el triangle $\overset{\Delta}{MAH}$ és rectangle)

$= \left(\overline{MC} - \overline{HC}\right)^2 + \overline{AH}^2 =$

$= \overline{MC}^2 + \overline{HC}^2 - 2\overline{MC}\cdot\overline{HC} + \overline{AH}^2 =$

$= \overline{MC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{MC}\cdot\overline{HC}$ (ja que $\overline{AC}^2 = \overline{HC}^2 + \overline{AH}^2$)

Per tant $\overline{AM}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{MC}\cdot\overline{HC}$ (1)

$\overline{AM}^2 = \overline{MH}^2 + \overline{AH}^2 =$ (ja que el triangle $\overset{\Delta}{MAH}$ és rectangle)

$= \left(\overline{BH} - \overline{BM}\right)^2 + \overline{AH}^2 =$

$= \overline{BH}^2 + \overline{BM}^2 - 2\overline{BH}\cdot\overline{BM} + \overline{AH}^2 =$

$= \overline{MC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{BH}\cdot\overline{BM} =$ (ja que $\overline{AB}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{AH}^2$)

$= \overline{MC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{BH}\cdot\overline{MC}$ (ja que $\overline{BM} = \overline{MC}$

Per tant $\overline{AM}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{BH}\cdot\overline{MC}$ (2)

Sumant (1)+(2)

$2\overline{AM}^2 = 2\overline{MC}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{MC}\cdot\left(\overline{BH} + \overline{HC}\right) =$

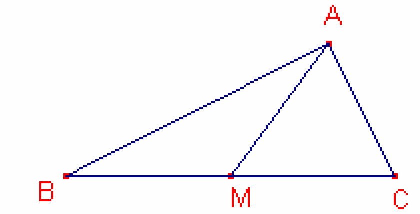
$= 2\overline{MC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{MC}\cdot\overline{BC} =$ (ja que $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$)

$= 2\overline{MC}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{BC}\cdot\overline{BC} =$ (ja que $2\overline{MC} = \overline{BC}$)

$= 2\overline{MC}^2$

Aleshores, $\overline{AM} = \overline{MC}$

b)




Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

Si es compleix que $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{MC}$,

aleshores,

el triangle $\overset{\Delta}{BMA}$ és isòsceles, per tant $\angle BAM = \hat{B}$

el triangle $\overset{\Delta}{AMC}$ és isòsceles, per tant $\angle CAM = \hat{C}$.

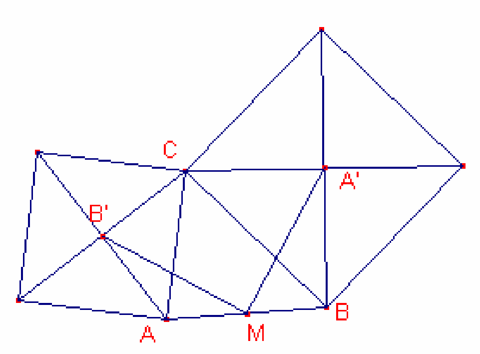
Per tant, $\hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$,

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o \Rightarrow 2\hat{A} = 180^o \Rightarrow \hat{A} = 90^o$, per tant, el triangle és rectangle.

# Dos teoremes sobre un triangle i 3 quadrats sobre els costats

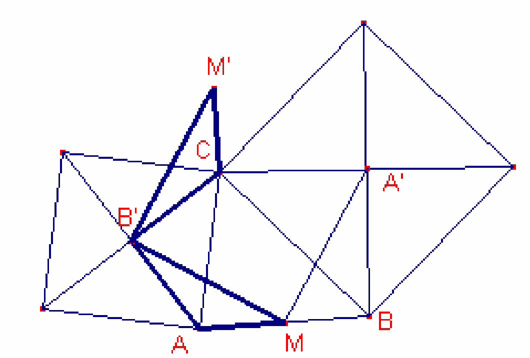
## Lema:

Sobre l'exterior de dos costats d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ dibuixem 2 quadrats (veure figura).
Siguen A', B' els centres dels quadrats. Siga M el punt mig de l'altre costat.
Aleshores els segments $\overline{A'M}, \overline{B'M}$ són perpendiculars i mesuren el mateix.



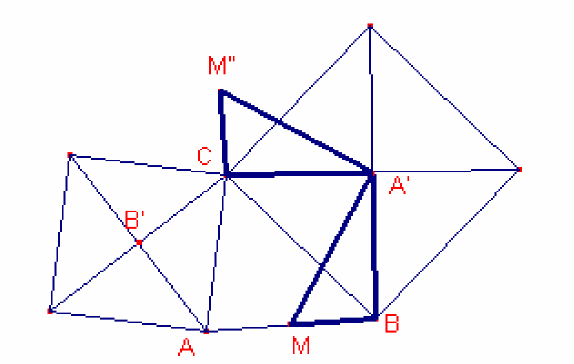

Demostració:

Considerem la rotació de centre B' i angle 90º del triangle $B'\overset{\Delta}{A}M$ que té per imatge $B'\overset{\Delta}{A}M'$.




$\overline{AM} = \overline{CM'}$ , $\overline{AB'} = \overline{B'C}$ , $\overline{B'M} = \overline{B'M'}$ ,a més a més, $\overline{B'M}, \overline{B'M'}$ són perpendiculars.

Considerem la rotació de centre A' i angle -90º del triangle $A'\overset{\Delta}{B}M$ que té per imatge $A'\overset{\Delta}{C}M''$.

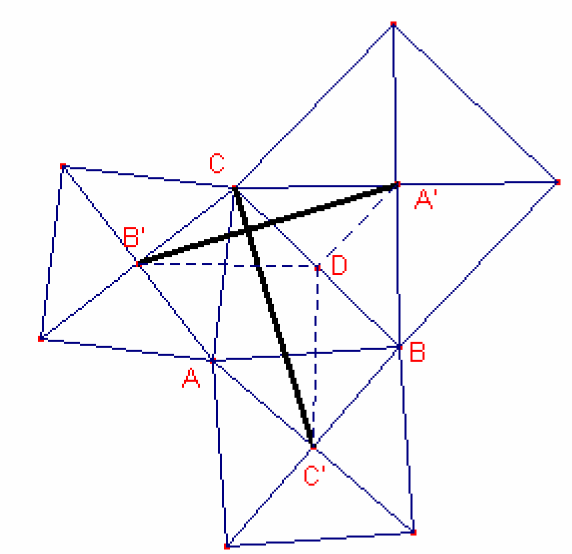



$\overline{BM} = \overline{CM''}$ , $\overline{A'B} = \overline{A'C}$ , $\overline{A'M} = \overline{A'M''}$ , a més a més, $\overline{A'M}, \overline{A'M''}$ són perpendiculars.

Provem que $M' = M''$
La recta que passa pels punts C, M' i la recta que passa pels punts C, M" són ambdues perpendiculars a la recta que passa pels punts A, B.
Aleshores C, M', M" estan alineats.
Com que C no està entre M' i M" i a més a més, $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM'} = \overline{CM''}$
Tenim que $M' = M''$
Aleshores, MA'M'B' és un quadrat.
Per tant, $\overline{A'M} = \overline{B'M}$ i són perpendiculars.

## Teorema 1:

Sobre l'exterior dels costats d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ dibuixem 3 quadrats (veure figura).
Siguen A', B', C' els centres dels quadrats.
Aleshores els segments $\overline{A'B'}, \overline{CC'}$ són perpendiculars i mesuren el mateix.




Siga D el punt mig del costat $\overline{BC}$
Pel lema anterior: $\overline{DB'} = \overline{DC'}$ i $\angle B'DC' = 90^{o}$.
$\overline{CD} = \overline{DA'}$ i $\angle CDA' = 90^{o}$

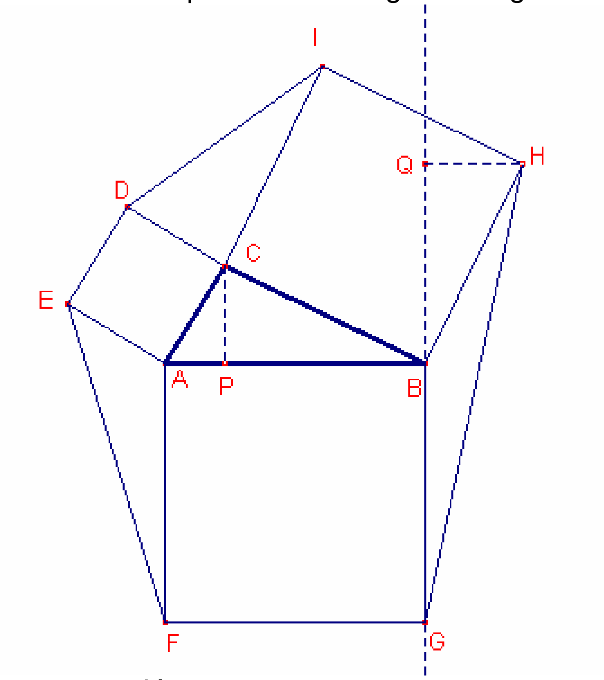
Considerem la rotació de centre D i angle 90º positiu.
La imatge de B' és C'.
La imatge de A' és C.

Aleshores els triangles $\overset{\Delta}{DCC'}, \overset{\Delta}{DA'B'}$ són iguals.
Per tant, $\overline{A'B'} = \overline{CC'}$
També la recta que passa pels punt C, C' és la imatge de la recta que passa pels punts A', B' en la rotació anterior.
Per tant, $\overline{A'B'}, \overline{CC'}$ són perpendiculars.

## Teorema de Cross

Sobre l'exterior dels costats d'un triangle qualsevol $\overset{\Delta}{ABC}$ construïm 3 quadrats i pels vèrtexs lliures s'uneixen formant 3 triangles. (Veure figura).

Les àrees d'aquests tres triangles són iguals a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.




Demostració:

Siga $\overline{CP}$ perpendicular al costat c.

Siga $\overline{QH}$ perpendicular a la recta que passa pels punts B, G.

Provem que els triangles $\overset{\Delta}{BCP}, \overset{\Delta}{BHQ}$ són iguals.

Els angles $\angle CBP$, $\angle QBH$ són iguals per ser els dos complementaris de l'angle $\angle CBQ$.

Els angles $\angle CPB$, $\angle HGB$ són iguals per ser angles rectes.

$\overline{BC} = \overline{BH}$ (per construcció del quadrat).

Per tant, $\overset{\Delta}{BCP}, \overset{\Delta}{BHQ}$ són iguals.

Aleshores, $\overline{CP} = \overline{GH}$

Notem que $\overline{CP}, \overline{GH}$ són les altures dels triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{BGH}$.

Notem que $\overline{AB} = \overline{BG}$ (per construcció del quadrat).

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{BGH}$ tenen la mateixa àrea (per tenir igual base i igual altura).

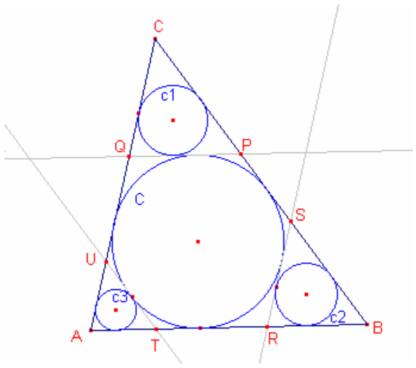
Anàlogament provaríem que els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{CID}, \overset{\Delta}{AEF}$ tenen la mateixa àrea.

# Altres teoremes sobre triangles.

## Teorema

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i la seua circumferència inscrita C de radi r.
Siguen les rectes tangents a la circumferència C paral·leles als costats del triangle, les quals determinen amb els vèrtexs els triangles $\overset{\Delta}{PQC}, \overset{\Delta}{RSB}, \overset{\Delta}{TUA}$.
En cada triangle, dibuixem la circumferència inscrita de radis $r_1, r_2, r_3$, respectivament.
Aleshores:

$$r = r_1 + r_2 + r_3$$




Demostració:

El radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$ on p és el semiperímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

Siguen $h_a$ l'altura del triangle referida al costat $a = \overline{BC}$ del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
L'altura (aplicant la fórmula d'Heró) mesura:

$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{TUA}$ són semblants.

Siga $h_3$ l'altura del triangle $\overset{\Delta}{TUA}$ referida al costat $\overline{TU}$.

$h_3 = h_a - 2r$

Aleshores:

$$\frac{r}{r_3} = \frac{h_a}{h_3}$$

$$\frac{r}{r_3} = \frac{h_a}{h_a - 2r} = \frac{\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}}{\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a} - 2\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{p}} = \frac{p}{p-a}$$

Anàlogament:

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{RSB}$ són semblants, aleshores:

$$\frac{r}{r_2} = \frac{p}{p-b}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{PQC}$ són semblants, aleshores:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{p}{p-c}$$

Per tant: $r_3 = \frac{r(p-a)}{p}$, $r_2 = \frac{r(p-b)}{p}$, $r_1 = \frac{r(p-c)}{p}$

Aleshores:

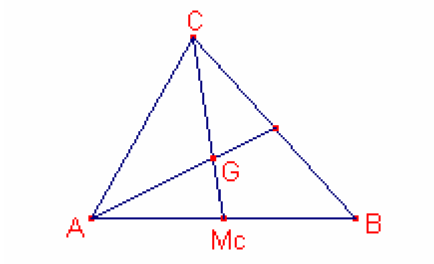
$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{r}{p}(p-a+p-b+p-c) = r$$

## Teorema: Coordenades cartesianes del baricentre d'un triangle.

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$, $C(c_1,c_2)$

Siga G el baricentre del triangle, aleshores

$$G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$




Demostració:

Siga $M_c$ el punt mig del segment $\overline{AB}$.

Les seues coordenades coordenades són: $M_c\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2}\right)$

El baricentre d'un triangle està a doble distància del vèrtex que del punt mig del costat oposat.

Aleshores, $\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{CM_c}$

Siga $G(x,y)$ el baricentre.

$$\vec{CG}=(x-c_1,y-c_2),\quad \overrightarrow{CM_c}=\left(\frac{a_1+b_1}{2}-c_1,\frac{a_2+b_2}{2}-c_2\right)$$

Aleshores,

$$(x-c_1,\ y-c_2)=\frac{2}{3}\left(\frac{a_1+b_1}{2}-c_1,\frac{a_2+b_2}{2}-c_2\right)$$

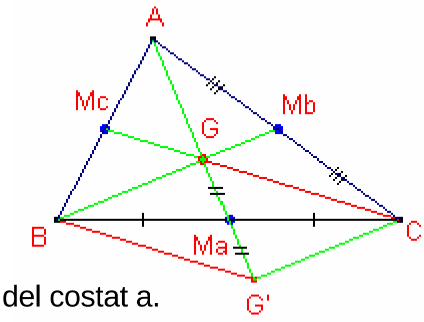
Igualant les components:

$$\begin{cases} x-c_1=\dfrac{a_1+b_1}{3}-\dfrac{2}{3}c_1 \\ y-c_2=\dfrac{a_2+b_2}{3}-\dfrac{2}{3}c_2 \end{cases}\quad \text{La solució del sistema és}\quad \begin{cases} x=\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3} \\ y=\dfrac{a_2+b_2+c_2}{3} \end{cases}$$

Per tant, $G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$.

**Nota:** El teorema s'hauria pogut provar determinant la intersecció de dues rectes mitjanes.

## Teorema: (Propietat vectorial del baricentre)




Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Siga G el baricentre.

Aleshores, $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$

Demostració:

Siga G' El simètric de G respecte del punt mig $M_a$ del costat a.

BG'CG és un paral· lelogram.

Aleshores, $\vec{GC}=\vec{BG'}$ (1)

Aplicant la propietat del baricentre:

$\vec{AG}=\vec{GG'}$ (2)

$\vec{GB}+\vec{BG'}=\vec{GG'}$

Substituint (1) i (2)

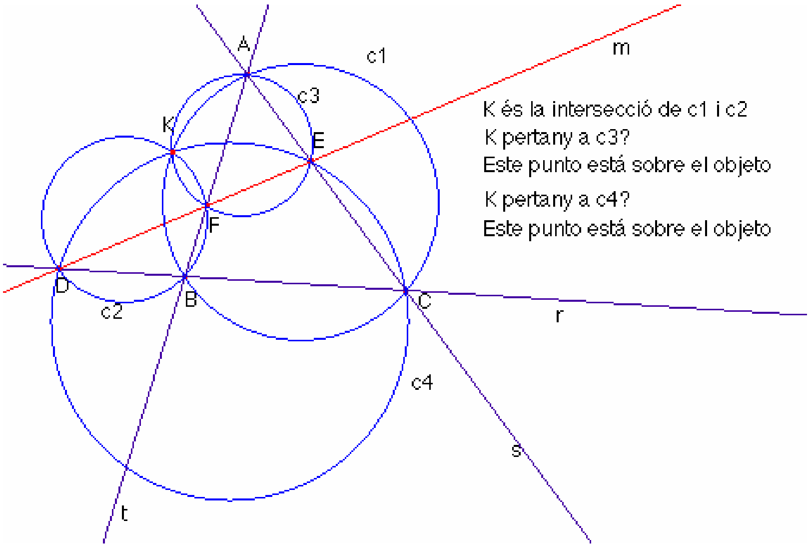
$\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{GG'}=-\vec{GA}$

Aleshores, $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$

# Punts del triangle

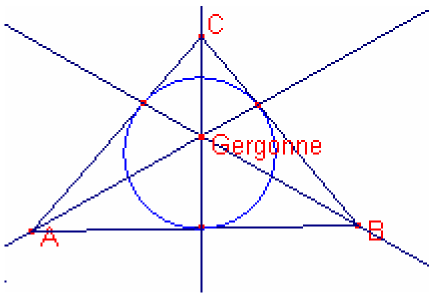
## Punt de Miquel

Siga un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga la recta r que passa pels punts B, C.
Siga la recta s que passa pels punts A, C.
Siga la recta t que passa pels punts A, B.
Siga una recta m que talla les rectes r, s, t en els punts D, E, F, respectivament.
Considerem les circumferències $C_1, C_2, C_3, C_4$ circumscrites als triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{DBF}, \overset{\Delta}{AEF}, \overset{\Delta}{DCE}$ respectivament.
Aleshores, les circumferències $C_1, C_2, C_3, C_4$ concorren en el punt K (anomenat punt Miquel). Auguste Miquel 1838.



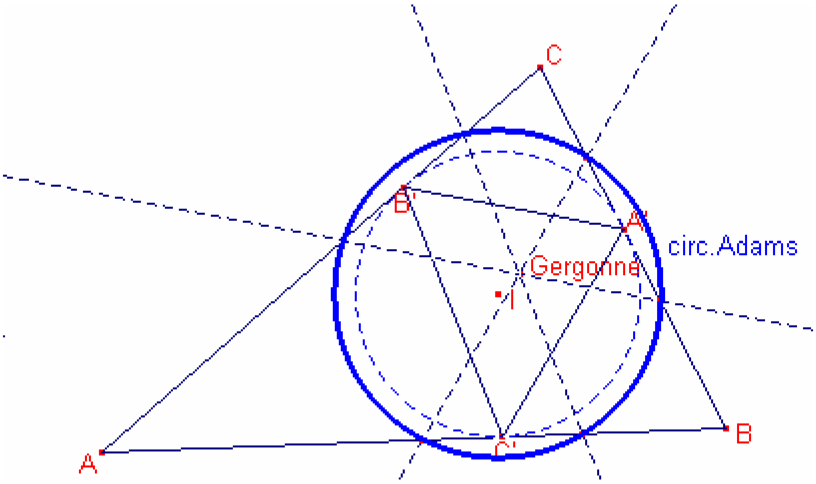

## Punt de Gergonne 1771-1859

En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ les rectes que uneixen els vèrtexs amb els punts de tangència de la circumferència inscrita al triangle (en els costats oposats) s'intersecten en un punt, anomenat el punt de Gergonne.



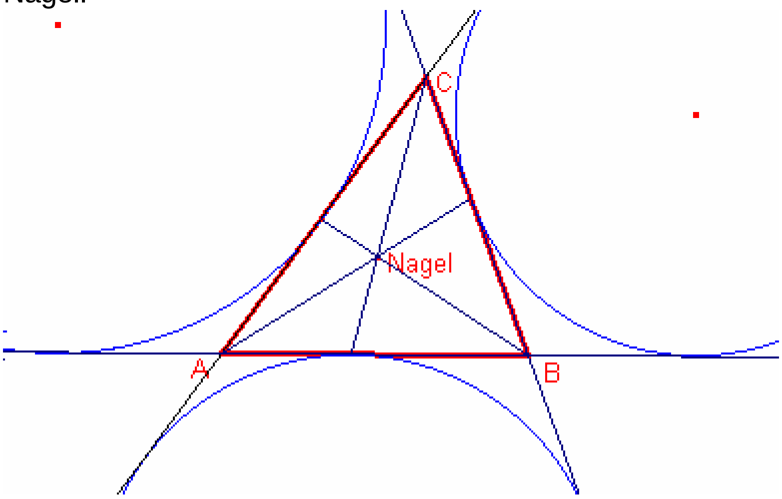
## La circumferència d'Adams

Si pel punt de Gergonne d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ es tracen paral· leles als costats del triangle de contacte interior $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ (triangle que forma els punts de tangència de la circumferència inscrita i el triangle), aquestes paral· leles tallen els costats del triangle en sis punts. Aquests punts estan en una mateixa circumferència, anomenada circumferència d'Adams. El centre de la circumferència d'Adams és l'incentre I del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



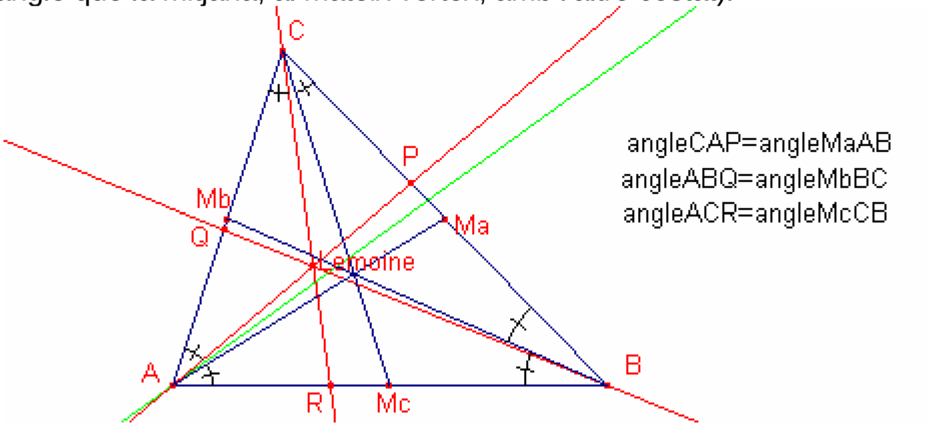

## Punt de Nagel

En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ les rectes que uneixen els vèrtexs amb els punts de tangència dels circumferències exinscrites (en els costats oposats), s'intersecten en un punt anomenat de Nagel.



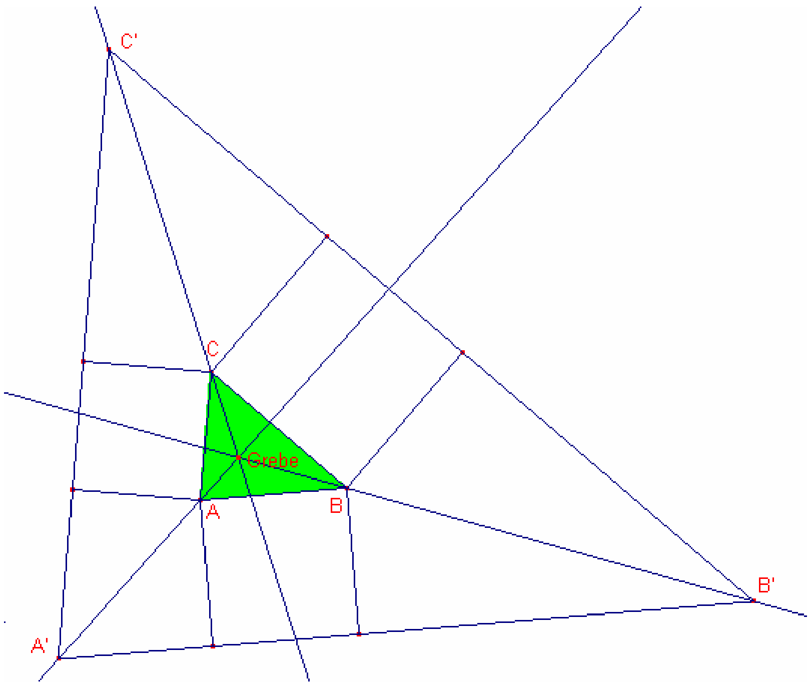
## Punt de Lemoine.

En qualsevol triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ les isogonals de les mitjanes concorren en un punt anomenat punt de Lemoine.
(La isogonal a una mitjana és la recta que passa per un vèrtex i forma amb el costat el mateix angle que la mitjana, al mateix vèrtex, amb l'altre costat).




## Punt de Grebe.

Sobre el costats d'un triangle qualsevol $\overset{\Delta}{ABC}$ construïm 3 quadrats (exteriors al triangle) i prolongats els vèrtexs lliures d'aquests quadrats construïm el triangle $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ (veure figura).
Aleshores les rectes AA', BB', CC' concorren en un punt que s'anomena punt de Gebre (Ernst Wilhelm Grebe (1804-1874)). Aquest punt coincideix amb el punt de Lemoine.

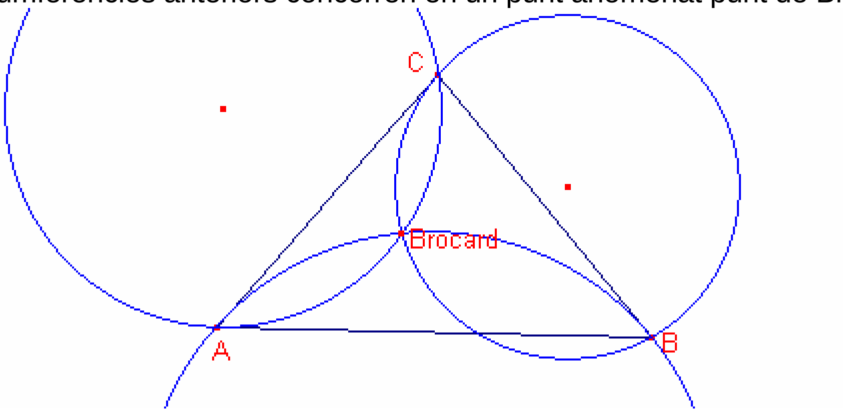


## Punt de Brocard 1845-1922

Siga un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ qualsevol. Considerem les següents circumferències:

a) Circumferència que passa pels punts A, B i és tangent a BC
b) Circumferència que passa pels punts B, C i és tangent a CA
c) Circumferència que passa pels punts C, A i és tangent a AB

Les tres circumferències anteriors concorren en un punt anomenat punt de Brocard.

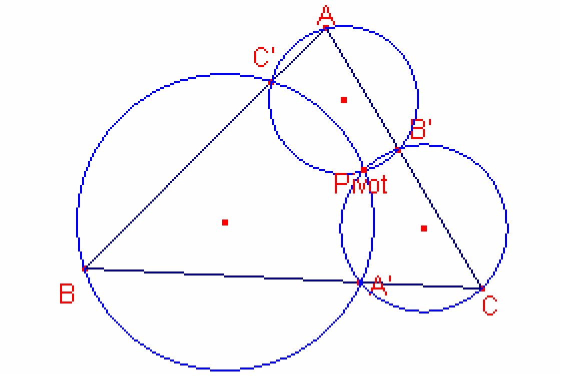



## Punt pivot

Siga un triangle qualsevol $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siguen els punts A’ sobre el costat a, B’ sobre el costat b, C’ sobre el costat c.

Considerem les circumferències circumscrites als triangles $\overset{\Delta}{AB'C'}, \overset{\Delta}{BA'C'}, \overset{\Delta}{CA'B'}$

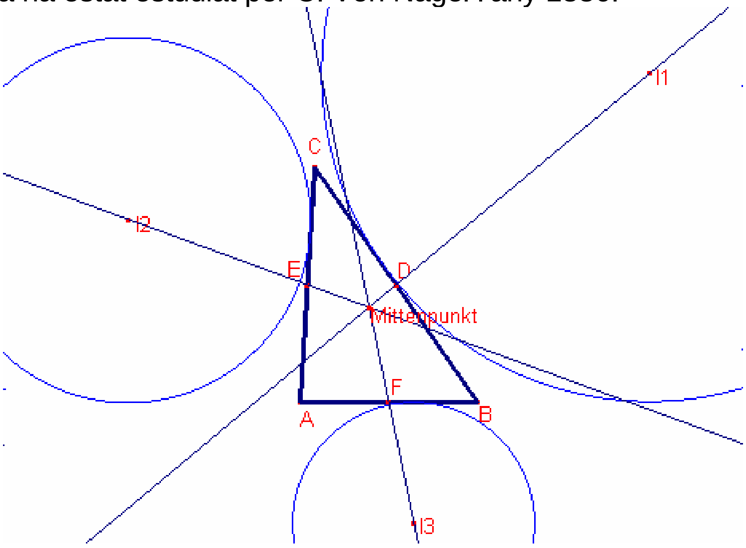
Les tres circumferències concorren en un punt que s’anomena pivot.




Aquesta proposició l’he trobada en la Lletra 54 del Club Cabri. Genova (Suïssa)
L’adreça de la pàgina web és: http://wwwedu.ge.ch/cptic/clubs/cabri

## Teorema: Mittenpunkt.

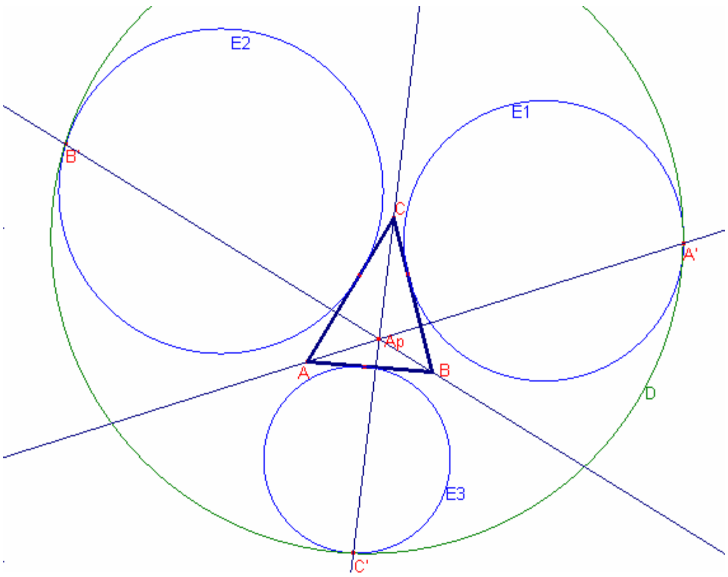
Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ siguen D, E, F els punts mig dels costats a, b, c respectivament.
Siguen $I_1, I_2, I_3$ els centres de les circumferències circumscrites al triangle.
Les rectes $r(D,I_1), r(E,I_2), r(F,I_3)$ s'intersecten en un punt Mittenpunkt.
Aquest teorema ha estat estudiat per C. Von Nagel l'any 1836.




## Punt d'Apoloni.

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siguen $E_1, E_2, E_3$ les cricumferències exinscrites al triangle.
Siga D la circumferència tangent exterior a les 3 circumferències anteriors (circumferència d'Apoloni).
Siguen A', B', C' els punts de tangència.
Aleshores: les rectes r(A,A'), r(B,B'), r(C,C') s'intersecten en un punt (Punt d'Apoloni).

Aquest teorema ha estat estudiat l'any 1987 per C. Kimberling, Shiko Iwata, Hidetosi Fukagawa.



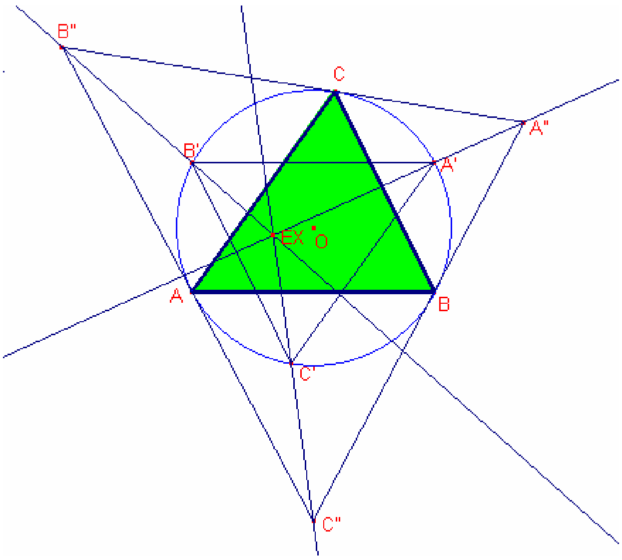
## Punt d'Exeter.

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Siga la circumferència circumscrita al triangle

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ simètric del triangle anterior respecte del circumcentre.

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ format per les rectes tangents a la circumferència circumscrita al triangle que passen pels punts A, B, C respectivament.
Aleshores: les rectes r(A',A"), r(B',B"), r(C'C") s'intersecten en un punt que s'anomena punt d'Exeter.

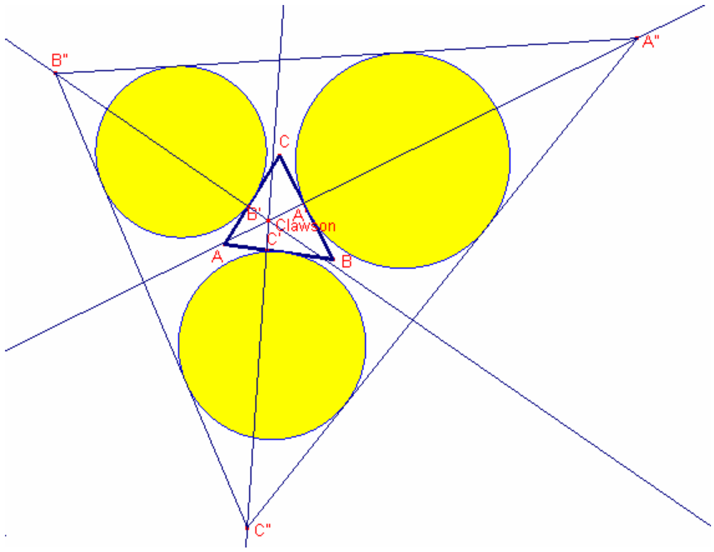
Aquest teorema va ser estudiat l'any 1986 a Phillips Exeter Academy




## Punt de Clawson.

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Siguen A', B', C' els peus de les alures als costats a, b, c, respectivament. Siguen E1, E2, E3 les circumferències exinscrites al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Considerem el triangle $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ format per les rectes tangents exteriors a les 3 circumferències exinscrites.
Aleshores: les rectes r(A'A"), r(B',B") r(C',C") s'intersecten en un punt que s'anomena punt de Clawson.

Aquest teorema ha estat demostrat per R. Lyness i G. R. Veldkamp l'any 1983

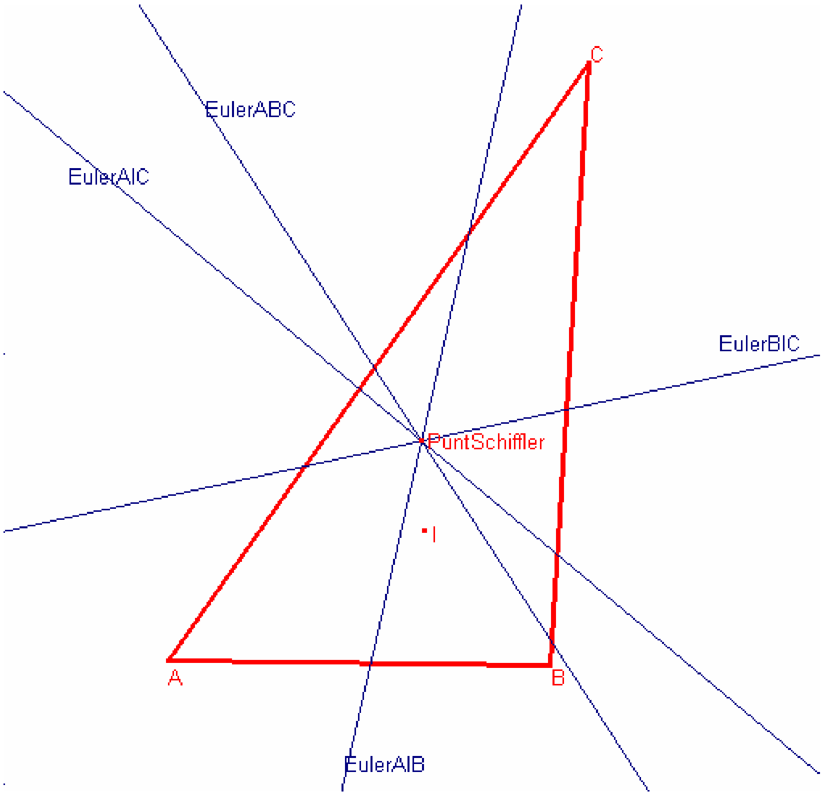


## Punt de Schiffler.

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Siga I l'incentre del triangle.

Considerem les rectes d'Euler dels triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{AIB}, \overset{\Delta}{AIC}, \overset{\Delta}{BIC}$
Aleshores: les quatre rectes s'intersecten en un punt, que s'anomena punt de Schiffler.

Aquest teorema va ser provat l'any 1986 per Kurt Schiffler, G. R. Veldkamp, i W. A. van der Spek.

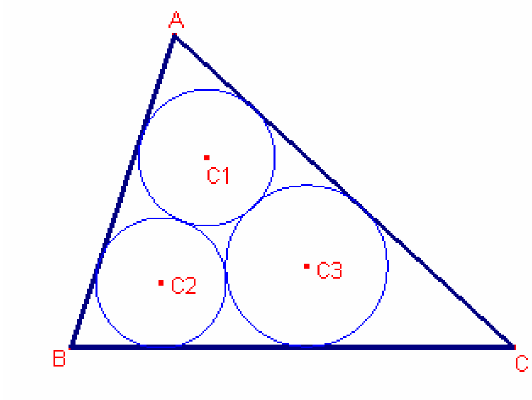



# Punts de Malfatti

### Circumferències de Malfatti

Donat un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ s'anomenen circumferències de Malfatti a les tres circumferències inscrites en el triangle de manera que les circumferències siguen tangents entre elles i tangents cadascuna d'elles a dos costats del triangle. (Veure l'applet)

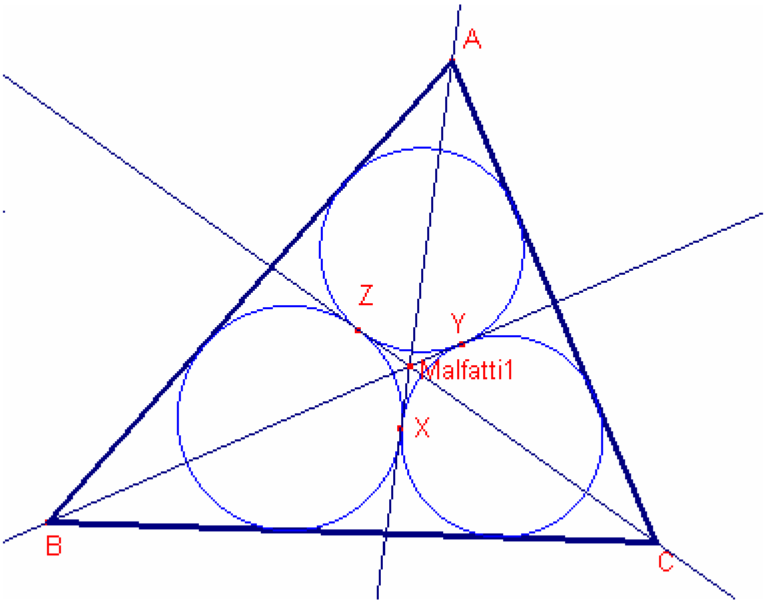
Aquest problema va ser proposat per **Gian Francesco Malfatti** (1731-1807)



Les circumferències de Malfatti tenen les següents propietats:

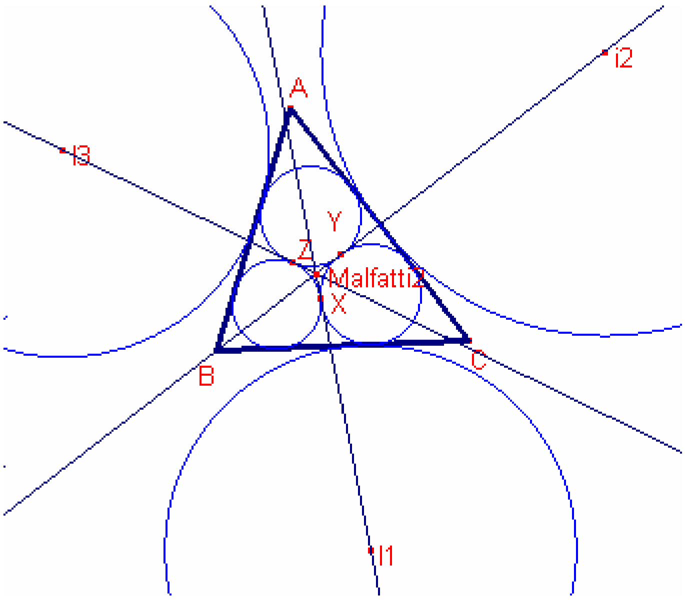
## Primer punt de Malfatti

Donat un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, dibuixem les tres circumferències de Malfatti.
Siguen X, Y, Z el punts de tangencia de les tres circumferències (Vegeu la figura).
Aleshores les rectes r(A,X), r(B,Y), r(C,Z) s'intersecten en un punt que s'anomena primer punt de Malfatti.




## Segon punt de Malfatti

Donat un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, dibuixem les tres circumferències de Malfatti.
Siguen X, Y, Z el punts de tangencia de les tres circumferències (Vegeu la figura).
Siguen $I_1, I_2, I_3$ els centres de les circumferències exincrites.
Aleshores les rectes r(I1,X), r(I2,Y), r(I3,Z) s'intersecten en un punt que s'anomena segon punt de Malfatti.



# Problemes

## Problemes

1.- Demostreu que en un triangle rectangle la bisectriu de l'angle recte divideix per la meitat l'angle entre la mitjana i l'altura traçades des del mateix vèrtex.

2.- La mitjana traçada sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle divideix l'angle recte en una raó 1:2 i és igual a m.
Determineu el valor dels costats.

3.- Siga un punt de la hipotenusa d'un triangle rectangle que dista igual dels dos catets, divideix a la hipotenusa en dos segments de 40 i 30 cm.
Determineu els catets.

4.- Determineu la bisectriu de l'angle recte d'un triangle rectangle de catets x i y.

5.- Des del vèrtex de l'angle recte d'un triangle rectangle s'han traçat la bisectriu que divideix la hipotenusa en dos segments m i n.
Determineu l'altura traçada sobre la hipotenusa.

6.- En un triangle rectangle les mitjanes traçades des dels angles aguts mesuren $\sqrt{52}$, $\sqrt{73}$. Calculeu la hipotenusa.

7.- El perímetre d'un triangle rectangle és igual a 60 m i l'altura traçada sobre la hipotenusa mesura 12 m.
Determineu els costats del triangle.

8.- En un triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, siga la mitjana $\overline{AM} = m$, siga la bisectriu $\overline{AP}$, siga $\overline{MP} = n$.
Determineu els catets.

9.- Determineu l'angle que formen la mitjana i bisectriu d'un angle agut d'un triangle rectangle, en funció d'aquest angle.

10.- Demostreu que si un triangle la raó de les tangents dels angles aguts és igual a la raó dels quadrats dels sinus d'aquests angles, aleshores el triangle és isòsceles o rectangle.

11.- Demostreu que si en un triangle es verifica $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}$ aleshores el triangle és isòsceles.

12.- La base d'un triangle isòsceles és $4\sqrt{2}$ m. La mitjana traçada sobre el costat lateral és igual a 5 m.
Calculeu el costat lateral.

13.- El costat lateral d'un triangle isòsceles mesura 4m, la mitjana traçada sobre el costat lateral 3 m.
Calculeu la base del triangle.

14.- La base d'un triangle isòsceles és 12 m i el costat lateral mesura 18 m. Sobre els costats iguals es tracen les altures.
Calculeu quant mesura el segment que uneix els peus d'aquestes altures.

15.- La base d'un triangle isòsceles és 12 i el costat lateral mesura 18.
Es tracen sobre els costats laterals les bisectrius.
Calculeu quant mesura el segment que uneix els peus de les bisectrius.

16.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ isòsceles $\overline{AB}=\overline{BC}$. A l'altura $\overline{BH}$ s'agafa un punt M tal que els angles $\angle$AMB, $\angle$AMC, $\angle$BMC són iguals.
En quina raó estan $\overline{BM}$ i l'altura si l'angle de la base és $\alpha$.

17.- L'angle de la base d'un triangle isòsceles és $\alpha$.
Determineu la raó entre la base i la mitjana traçada sobre un costat lateral.

18.- Determineu els angles d'un triangle isòsceles si sabem que l'ortocentre divideix per la meitat l'altura traçada sobre la base.

19.- Les rectes r, s, t són paral· leles, s està entre les altres dues a una distància p, q respectivament.
Calculeu el costat d'un triangle equilàter els vèrtexs del qual estan sobre les 3 rectes.

20.- Siga un triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$. Sobre el costat $\overline{BC}$ determineu el punt D tal que $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{1}{4}$.
Calculeu $\frac{\overline{BM}}{\overline{ME}}$ on M és la intersecció del segment $\overline{AD}$ i l'altura $\overline{BE}$.

21.- La base d'un triangle isòsceles és a. L'angle oposat a la base $2\alpha$.
Calculeu la bisectriu sobre el costat lateral.

22.- En un triangle equilàter es traça un segment que uneix un vèrtex i un punt del costat oposat E tal que $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{1}{2}$.
Calculeu l'angle que forma aquest segment i cada costat.

23.- L'angle de la base d'un triangle isòsceles és $\mathrm{arctg}\frac{3}{4}$.
Calculeu l'angle $\omega$ que formen la mitjana i la bisectriu traçades al costat lateral.

24.- Determineu l'angle desigual d'un triangle isòsceles si la mitjana a un costat lateral i la base formen un angle $\arcsin\frac{3}{5}$.

25.- Siga un triangle isòsceles tal que $\hat{B}$=110º. En el seu interior es determina el punt M que forma els angles $\angle$MAC=30º, $\angle$MCA=25º.
Calculeu l'angle $\angle$CMB.

26.- Demostreu que en tot triangle la suma de les mitjanes és major que $\frac{3}{4}$ del perímetre, però menor que el perímetre.

27.- La bisectriu d'un angle d'un triangle divideix el costat oposat en segments de 2 cm. i 4 cm. L'altura traçada sobre el mateix costat és igual a $\sqrt{15}$ cm.
Determineu el triangle i classifiqueu-lo.

28.- Determineu la raó que hi ha entre la suma dels quadrats de les mitjanes i la suma dels quadrats dels costats d'un triangle.

29.- Classifiqueu un triangle sabent que les mitjanes compleixen $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$

30.- Dos costats d'un triangle mesuren a, b i les mitjanes sobre aquests costats formen 90º. Calculeu l'altre costat.

31.- En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tracem la bisectriu $\overline{AD}$. Determineu $\overline{BC}$ sabent que $\overline{AC} = b$ $\overline{AB} = c$, $\overline{AD} = \overline{BD}$.

32.- En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $\overline{BC} = 12$ $\overline{AC} = 8$ i l'angle $\hat{A} = 2\hat{B}$
Calculeu $\overline{AB}$

33.- L'altura d'un triangle mesura 6 cm i divideix l'angle en una proporció 2:1 i la base en 2 segments el menor dels quals mesura 3 cm.
Determineu els costats del triangle.

34.- L'altura d'un triangle divideix els angles en proporció 2:1 i la base en dos segments en proporció k:1 (k>0).
Determineu l'angle major de la base.

35.- En un triangle acutangle $\overset{\Delta}{ABC}$ l'angle agut format per les altures $\overline{AD}, \overline{CE}$ és $\alpha = \angle ABC$. Sabent que $\overline{AD} = x$ $\overline{CE} = y$, calculeu $\overline{AC}$.

36.- La base d'un triangle és 4. La mitjana sobre la base és $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ un dels angles aguts de la base és 15º.
Calculeu l'angle agut format per la mitjana i la base.

37.- En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $\hat{A} = 30^\circ$ $\hat{B} = 50^\circ$. Demostreu que $c^2 = b(a+b)$.

38.- Siguen dos triangles $\overset{\Delta}{ABC}$ $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ tal que $\hat{B} = \hat{B}'$ $\hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ$
Demostreu que $aa' = bb' + cc'$.

39.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ els angles del qual estan en proporció 4:2:1
Demostreu que els costats compleixen $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

40.- L'altura, la bisectriu i la mitjana traçades des d'un vèrtex d'un triangle divideixen l'angle en 4 parts iguals.
Determineu els angles del triangle.

41.- Siga $\overline{CD}$ l'altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Determineu la dependència dels angles $\hat{A}, \hat{B}$ sabent que $\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{DB}$

42.- Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siguen L, M els punts migs dels segments AB, AC, respectivament.

Siga C1 la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
La recta que passa pels punts L, M talla la circumferència C1 en els punts X, Y.

Proveu que $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{\overline{LY}}{\overline{LM}} = \dfrac{\overline{LM}}{\overline{MY}}$.

43.- Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangle rectangle $A = 90º$.
Si els costats del triangle rectangle estan en progressió geomètrica la raó de proporcionalitat és $\sqrt{\Phi}$.

44.- De tots els triangles isòsceles circumscrits en un semicercle de radi R determineu el de menor perímetre.
Calculeu també la raó entre l'altura del triangle (sobre el costat desigual) i el radi R.

45.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de incentre I.
Siga P el punt projecció de A sobre la recta que passa pels punts B, I.
Siga Q el punt projecció de A sobre la recta que passa pels punt C, I.

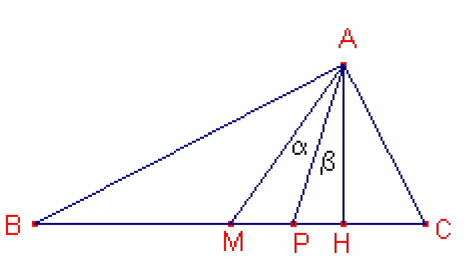
Aleshores, $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BI}} + \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{CI}} = \cot\left(\dfrac{A}{2}\right)$

46.- Un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle si i només si $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$

**Problema 1**

Demostreu que en un triangle rectangle la bisectriu de l'angle recte divideix per la meitat l'angle entre la mitjana i l'altura traçades des del mateix vèrtex.

Solució:




Siguen la mitjana $\overline{AM}$, l'altura $\overline{AH}$, i la bisectriu $\overline{AP}$.

En un triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ , $A = 90^o$ la mitjana traçada a la hipotenusa és igual a la meitat de la hipotenusa. Per tant,

$\overline{AM} = \overline{MC} \quad \Rightarrow \quad \overset{\Delta}{AMC}$ és isòsceles.

Aleshores $\hat{C} = 45^o + \alpha$

$\hat{P} + 45^o + \hat{C} = 180^o$

$\hat{P} + \beta = 90^o \Rightarrow \hat{P} = 90^o - \beta$

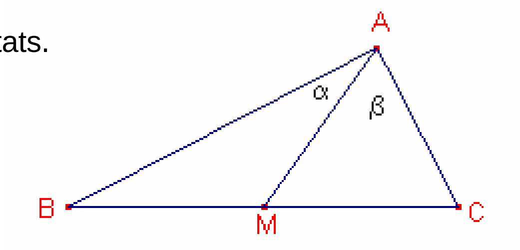
Per tant $90^o - \beta + 45^o + 45^o + \alpha = 180^o$

Podem concloure que $\beta = \alpha$.

**Problema 2**

La mitjana traçada sobre la hipotenusa d'un triangle rectangle divideix l'angle recte en una raó 1:2 i és igual a m.
Determineu el valor dels costats.

Solució:




Siga la mitjana $\overline{AM} = m$

En un triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $A = 90^o$ la mitjana traçada a la hipotenusa és igual a la meitat de la hipotenusa. Aleshores, $\overline{BC} = 2\overline{AM} = 2m$ .

$\begin{cases} \alpha + \beta = 90^o \\ \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ aleshores $\alpha = 30^o, \beta = 60^o$

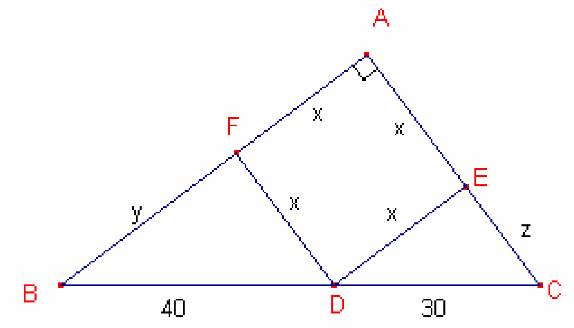
$\overset{\Delta}{AMC}$ és equilàter $\overline{AM} = m \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} = m$

$\overset{\Delta}{AMB}$ és isòsceles, per tant $\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{4m^2 - m^2} = m\sqrt{3}$

**Problema 3**

Siga un punt de la hipotenusa d'un triangle rectangle que dista igual dels dos catets, divideix a la hipotenusa en dos segments de 40 i 30 cm.
Determineu els catets.

Solució:




Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $A = 90º$

Siga el punt D sobre el costat $\overline{BC}$ tal que dista una distància x dels altres dos costats: $\overline{DF} = \overline{DE} = x$, DEAF és un quadrat.

Àrea del triangle = $\dfrac{(x+y)(x+z)}{2}$

Àrea del triangle = $x^2 + \dfrac{xy}{2} + \dfrac{xz}{2}$

$\dfrac{(x+y)(x+z)}{2} = x^2 + \dfrac{xy}{2} + \dfrac{xz}{2}$, aleshores $x^2 = yz$

Com que $\overset{\Delta}{DEC}$ és rectangle $x^2 + z^2 = 30^2$

Com que $\overset{\Delta}{BDF}$ és rectangle $x^2 + y^2 = 40^2$

Siga el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x^2 = yz \\ x^2 + z^2 = 30^2 \\ x^2 + y^2 = 40^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = yz \\ yz + z^2 = 900 \\ yz + y^2 = 1600 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 24 \\ y = 32 \\ z = 18 \end{cases}$$

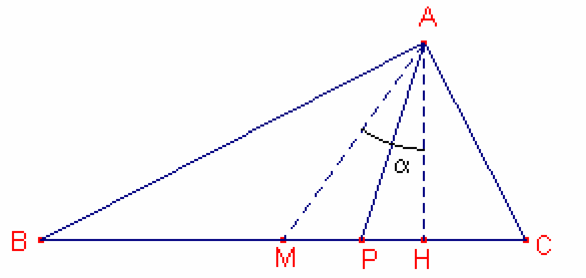
$\overline{AB} = x + y = 56$

$\overline{AC} = x + z = 42$

**Problema 4**

Determineu la bisectriu de l'angle recte d'un triangle rectangle de catets x i y.

Solució:




Siguen la mitjana $\overline{AM}$, l'altura $\overline{AH}$, i la bisectriu $\overline{AP}$.
Siga l'angle $\alpha = \angle MAH$

$\overline{AB} = x \quad \overline{AC} = y \quad \overline{BC} = \sqrt{x^2 + y^2}$

En un triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^\circ$ la mitjana traçada a la hipotenusa és igual a la meitat de la hipotenusa.

$$\overline{AM} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}$$

L'àrea $\left[\overset{\Delta}{ABC}\right] = \frac{xy}{2}$, L'àrea $\left[\overset{\Delta}{ABC}\right] = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}\cdot\overline{AH}}{2}$.

Igualant les àrees:

$$\frac{xy}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}\cdot\overline{AH}}{2} \quad \Rightarrow \quad \overline{AH} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AH}}{\overline{AM}} = \frac{\dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}} = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Com que en un triangle rectangle la bisectriu de l'angle recte divideix per la meitat l'angle que formen la mitjana i l'altura traçades des del mateix vèrtex. (problema 1).

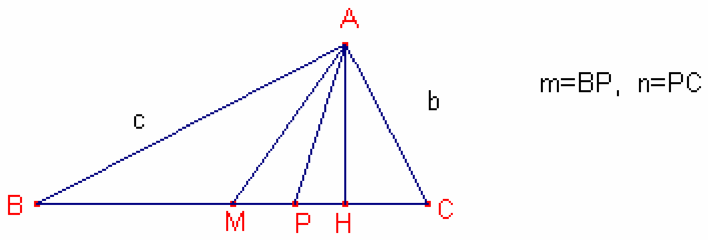
$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AP}} = \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

Aleshores $$\overline{AP} = \frac{\overline{AH}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{\dfrac{1 + \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}}{2}}} = \frac{\sqrt{2}xy}{x + y}$$

Problema 5

Des del vèrtex de l'angle recte d'un triangle rectangle s'ha traçat la bisectriu que divideix la hipotenusa en dos segments m i n.
Determineu l'altura traçada sobre la hipotenusa.

Solució:




Siguen la mitjana $\overline{AM}$, l'altura $\overline{AH}$, i la bisectriu $\overline{AP}$.
Siguen els segments $\overline{BP} = m$, $\overline{PC} = n$. Siguen $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$

La bisectriu d'un triangle divideix el costat que talla en segments proporcionals als costats adjacents. Per tant:

$$\frac{b}{c} = \frac{n}{m}$$

Per les àrees $\frac{m+n}{2}\overline{AH} = \frac{bc}{2}$

Com que $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$ és rectangle $c^2 + b^2 = (m+n)^2$

Considerem el sistema:

$$\begin{cases} \frac{n}{m} = \frac{b}{c} \\ bc = (m+n)\overline{AH} \\ b^2 + c^2 = (m+n)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = \frac{n}{m}c \\ \frac{n}{m}c^2 = (m+n)\overline{AH} \\ \frac{n^2}{m^2}c^2 + c^2 = (n+m)^2 \end{cases}$$

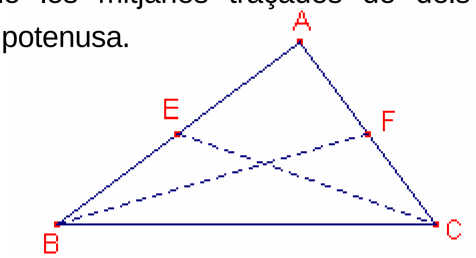
Dividint les dues últimes equacions obtenim:

$$\overline{AH} = \frac{nm(m+n)}{n^2 + m^2}$$

Problema 6

En un triangle rectangle les mitjanes traçades de dels angles aguts mesuren $\sqrt{52}$, $\sqrt{73}$ . Calculeu la hipotenusa.

Solució:




Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ , $A = 90^{\circ}$ .

Siguen les mitjanes $\overline{BF}$, $\overline{CE}$

Siguen $\overline{BC} = x$, $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ $\overline{BF} = \sqrt{73}$ $\overline{EC} = \sqrt{52}$

Com que $\overset{\Delta}{AFB}$ és rectangle $c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{73}\right)^2$

Com que $\overset{\Delta}{AEC}$ és rectangle $\left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2 = \left(\sqrt{52}\right)^2$

Com que $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle $c^2 + b^2 = x^2$

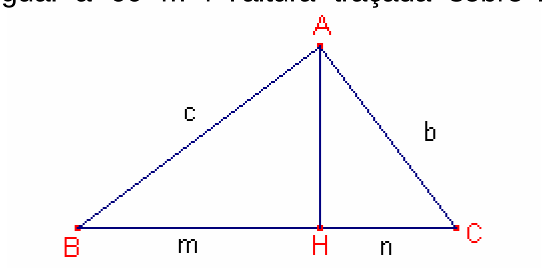
Considerem el sistema:

$$\begin{cases} c^2 + \frac{b^2}{4} = 73 \\ \frac{c^2}{4} + b^2 = 52 \\ c^2 + b^2 = x^2 \end{cases} \quad \text{les solucions són} \quad \begin{cases} c = 8 \\ b = 6 \\ x = 10 \end{cases}$$

**Problema 7**

El perímetre d'un triangle rectangle és igual a 60 m i l'altura traçada sobre la hipotenusa mesura 12 m.
Determineu els costats del triangle.

Solució:




Siguen $\overline{AB} = c$ $\overline{AC} = b$ $\overline{BC} = a$

El perímetre és $c + b + a = 60$

L'àrea és $bc = 12a$

Com que $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle $c^2 + b^2 = a^2$

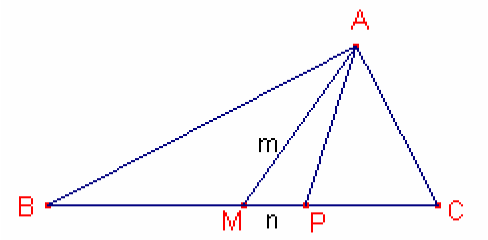
Considerem el sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 60 \\ bc = 12a \\ b^2 + c^2 = a^2 \end{cases} \quad \text{la solució del qual és} \quad \begin{cases} a = 25 \\ b = 20 \\ c = 15 \end{cases}$$

**Problema 8**

En un triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$, siga la mitjana, $\overline{AM} = m$, siga la bisectriu $\overline{AP}$, siga $\overline{MP} = n$.
Determineu els catets.

Solució:




Siguen $\overline{AB} = c$ $\overline{AC} = b$
Siga la mitjana $\overline{AM} = m$, i siga la bisectriu $\overline{MP} = n$

En un triangle rectangle la mitjana traçada a la hipotenusa és igual a la meitat de la hipotenusa, per tant $\overline{BC} = 2m$ $\overline{MC} = m$

Per la propietat de la bisectriu tenim que: $\frac{\overline{PC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}}$, és a dir $\frac{m-n}{b} = \frac{m+n}{c}$

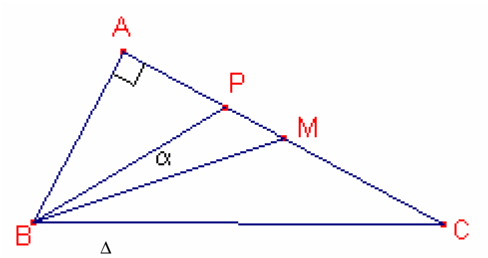
Com que el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle $b^2 + c^2 = (2m)^2$
Considerem el sistema:

$$\begin{cases} \frac{m-n}{b} = \frac{m+n}{c} \\ b^2 + c^2 = (2m)^2 \end{cases} \quad \text{la seua solució és :} \quad \begin{cases} b = \frac{\sqrt{2}m(m-n)}{\sqrt{m^2+n^2}} \\ c = \frac{\sqrt{2}m(m+n)}{\sqrt{m^2+n^2}} \end{cases}$$

**Problema 9**

Determineu l'angle que formen la mitjana i bisectriu d'un angle agut d'un triangle rectangle, en funció d'aquest angle.

Solució:




Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$,

Siguen la bisectriu $\overline{BP}$, la mitjana $\overline{BM}$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ $\operatorname{tg}\hat{B} = \frac{c}{b}$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\hat{B}}{2} + \alpha\right) = \frac{\frac{b}{2}}{c}. \quad \text{Aleshores,} \quad \frac{1}{2}\operatorname{tg}\hat{B} = \operatorname{tg}\left(\frac{\hat{B}}{2} + \alpha\right)$$

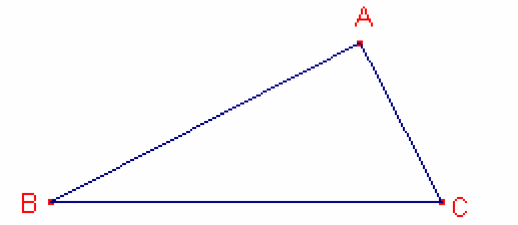
Deduïm:

$$\frac{\hat{B}}{2} + \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\hat{B}}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{\hat{B}}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\hat{B}}{2}\right)$$

**Problema 10**

Demostreu que si en un triangle la raó de les tangents dels angles aguts és igual a la raó dels quadrats dels sinus d'aquests angles, aleshores el triangle és isòsceles o rectangle.

Solució:




$$\frac{\operatorname{tg}\hat{C}}{\operatorname{tg}\hat{B}} = \frac{\sin^2\hat{C}}{\sin^2\hat{B}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos\hat{B}}{\cos\hat{C}} = \frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{B}} \quad \Rightarrow \quad \sin 2\hat{B} = \sin 2\hat{C}$$

Aleshores $2\hat{B} = 2\hat{C}$ o $2\hat{B} = 180º - 2\hat{C}$

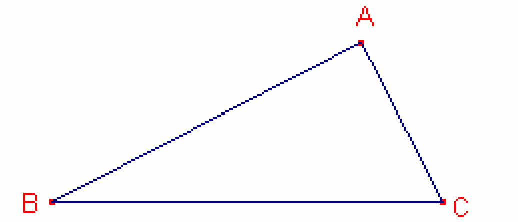
Per tant $\hat{C} = \hat{B}$ o $\hat{C} + \hat{B} = 90º$.

En el primer cas el triangle és isòsceles i en el segon cas el triangle és rectangle.

**Problema 11**

Demostreu que si en un triangle es verifica $\frac{a}{\cos\hat{A}} = \frac{b}{\cos\hat{B}}$ aleshores el triangle és isòsceles.

Solució:




Aplicant el teorema dels sinus $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}}$

Considerem el sistema:

$$\begin{cases} \frac{a}{\cos\hat{A}} = \frac{b}{\cos\hat{B}} \\ \frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} \end{cases}$$

Dividint-les:

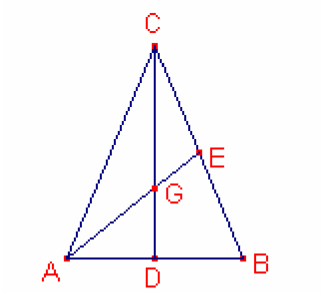
$$\frac{\sin\hat{A}}{\cos\hat{A}} = \frac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\hat{A} = \operatorname{tg}\hat{B}$$

Aleshores $\hat{A} = \hat{B}$

**Problema 12**

La base d'un triangle isòsceles és $4\sqrt{2}$ m. La mitjana traçada sobre el costat lateral és igual a 5 m.
Calculeu el costat lateral.

Solució:




Siguen l'altura $\overline{CD}$, la mitjana $\overline{AE}=5$ i el costat $\overline{AC}=b$
Siga G el baricentre:

Aleshores, $\overline{AG}=\frac{2}{3}5 \quad \overline{AD}=\frac{4\sqrt{2}}{2}$

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{AGD}$ $\quad \overline{GD}=\sqrt{\overline{AG}^2+\overline{AD}^2}=\sqrt{\frac{100}{9}-8}=\frac{2}{3}\sqrt{7}$

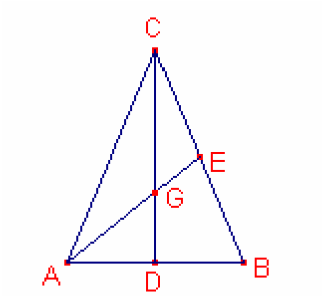
Aleshores $\overline{DC}=3\overline{GD}=2\sqrt{7}$

Per tant $\quad b=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{CD}^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{7}\right)^2}=6$

**Problema 13**

El costat lateral d'un triangle isòsceles mesura 4m, la mitjana traçada sobre el costat lateral 3 m.
Calculeu la base del triangle.

Solució:




Siguen la mitjana $\overline{AE}=3$, el baricentre G.
Per la propietat del baricentre $\overline{GE}=1, \quad \overline{AG}=2$

Siguen $\overline{AD}=x, \quad \overline{CD}=h, \quad \overline{GD}=\frac{h}{3}$

Per ser el triangle $\overset{\Delta}{AGD}$ rectangle tenim $2^2=x^2+\left(\frac{h}{3}\right)^2$

Per ser el triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ rectangle tenim $4^2=x^2+h^2$

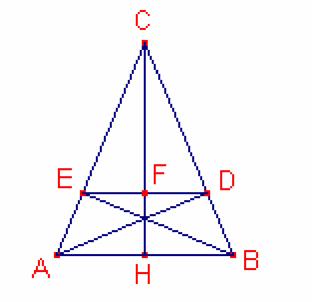
Considerem el sistema $\begin{cases} 4=x^2+\frac{h^2}{9} \\ 16=x^2+h^2 \end{cases}$ la seua solució és $\begin{cases} x=\sqrt{\frac{5}{2}} \\ h=3\cdot\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$

Aleshores $\overline{AB}=2\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{10}$

Problema 14

La base d'un triangle isòsceles és 12 m i el costat lateral mesura 18 m. Sobre els costats iguals es tracen les altures.
Calculeu quant mesura el segment que uneix els peus d'aquestes altures.

Solució:




Considerem les altures $\overline{CH}, \overline{AD}, \overline{BE}$.

Per ser el triangle $\overset{\Delta}{ACH}$ rectangle tenim $\overline{CH}=\sqrt{18^2-6^2}=\sqrt{288}$

Igualant les àrees del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tenim $\dfrac{12\sqrt{288}}{2}=\dfrac{18\overline{AD}}{2}$.

Per tant $\overline{AD}=\dfrac{2}{3}\sqrt{288}$

Per ser el triangle $\overset{\Delta}{ADB}$ rectangle tenim $\overline{BD}^2+\overline{AD}^2=12^2$.

Aleshores, $\overline{BD}=4$, $\overline{CD}=18-4$

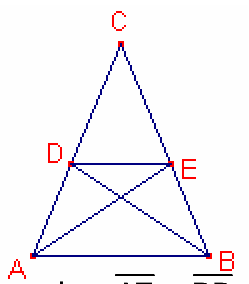
Els triangles $\overset{\Delta}{CHB}, \overset{\Delta}{CFD}$ són semblants, aleshores $\dfrac{\overline{HB}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{DF}}{\overline{CD}}$, $\dfrac{6}{18}=\dfrac{\overline{DF}}{14}$

Aleshores, $\overline{DF}=\dfrac{14}{3}$ $\overline{ED}=2\overline{DF}=\dfrac{28}{3}$

**Problema 15**

La base d'un triangle isòsceles és 12 i el costat lateral mesura 18.
Es tracen sobre els costats laterals les bisectrius.
Calculeu quant mesura el segment que uneix els peus de les bisectrius.

Solució:




Considerem les bisectrius $\overline{AE}$, $\overline{BD}$

Per la propietat de les bisectrius,

$\dfrac{\overline{CE}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{AB}}$ $\dfrac{18-\overline{BE}}{18}=\dfrac{\overline{BE}}{12}$, aleshores $\overline{BE}=\dfrac{36}{5}$ $\overline{CE}=18-\overline{BE}=\dfrac{54}{5}$

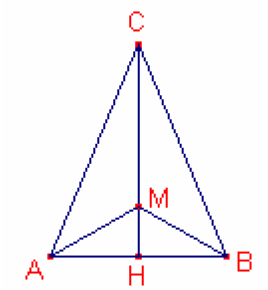
Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}, \overset{\Delta}{DEC}$ són semblants, per tant $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{CE}}$

$$\frac{12}{18}=\frac{\overline{DE}}{\frac{54}{5}} \Rightarrow \overline{DE}=\frac{36}{5}$$

**Problema 16**

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ isòsceles $\overline{AB} = \overline{BC}$. Sobre l'altura $\overline{BH}$ s'agafa un punt M tal que els angles $\angle AMB$, $\angle AMC$, $\angle BMC$ són iguals.
En quina raó estan $\overline{BM}$ i l'altura si l'angle de la base és $\alpha$.

Solució:




Siguen $\angle CAB = \alpha$, $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$
Notem que $\angle MAB = 30^o$
$\overline{BH} = c \cdot \sin\alpha$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $\dfrac{c}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin(180^o - 2\alpha)}$

$\dfrac{c}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin(2\alpha)} = \dfrac{b}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$ aleshores, $b = 2c\cdot\cos\alpha$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AMC}$ $\dfrac{b}{\sin 120^o} = \dfrac{\overline{AM}}{\sin 30^o} \Rightarrow \overline{AM} = \dfrac{b}{\sqrt{3}}$

$$\overline{MH} = \overline{AM}\cdot\sin 30^o \quad \Rightarrow \quad \overline{MH} = \frac{b}{2\sqrt{3}} = \frac{2c\cdot\cos\alpha}{2\sqrt{3}} = \frac{c\cdot\cos\alpha}{\sqrt{3}}$$

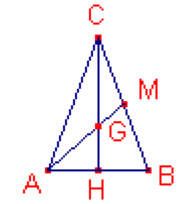
$$\overline{BM} = \overline{BH} - \overline{MH} = a\left(\sin\alpha - \frac{\sqrt{3}\cos\alpha}{3}\right)$$

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{BM}} = \frac{a\cdot\sin\alpha}{a\left(\sin\alpha - \frac{\sqrt{3}\cos\alpha}{3}\right)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha - \frac{\sqrt{3}\cos\alpha}{3}}$$

**Problema 17**

L'angle de la base d'un triangle isòsceles és $\alpha$.
Determineu la raó entre la base i la mitjana traçada sobre un costat lateral.

Solució:




Siguen $\hat{A}=\alpha$, $\overline{AC}=\overline{BC}=b$, $\overline{AB}=c$, la mitjana $\overline{AM}$, i G el baricentre.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $\dfrac{c}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin(180º-2\alpha)}$

Aleshores, $\overline{AB}=c=2a\cdot\cos\alpha$

$\overline{CH}=a\cdot\sin\alpha$ $\overline{GH}=\dfrac{a\cdot\sin\alpha}{3}$ (aplicant la propietat del baricentre).

El triangle $\overset{\Delta}{AGH}$ és rectangle per tant $\overline{AG}=\sqrt{\overline{GH}^2+\overline{AH}^2}=$

$$=\sqrt{\frac{a^2\sin^2\alpha}{9}+\frac{c^2}{4}}=\frac{\sqrt{4a^2\sin^2\alpha+9c^2}}{6}=\frac{\sqrt{4a^2\sin^2\alpha+9(2a\cdot\cos\alpha)^2}}{6}=$$

$$=\frac{a}{3}\sqrt{\sin^2\alpha+9\cos^2\alpha}$$

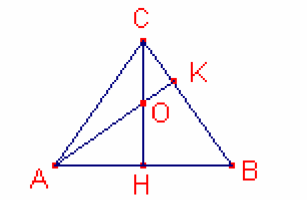
Aleshores, $\overline{AM}=\dfrac{3}{2}\overline{AG}=\dfrac{a}{2}\sqrt{\sin^2\alpha+9\cos^2\alpha}$

Per tant: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AM}}=\dfrac{2a\cdot\cos\alpha}{\frac{a}{2}\sqrt{\sin^2\alpha+9\cos^2\alpha}}=\dfrac{4\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+9\cos^2\alpha}}$

**Problema 18**

Determineu els angles d'un triangle isòsceles si sabem que l'ortocentre divideix per la meitat l'altura traçada sobre la base.

Solució:




Siguen $\overline{BC}=\overline{AC}=a$, $\overline{AB}=c$, $\hat{A}=\alpha$

Siguen les altures $\overline{CH}$, $\overline{AK}$,

l'ortocentre O, $\alpha=\angle AOH$. $\overline{OH}=\overline{CO}=x$

El triangle $\overset{\Delta}{ACH}$ és rectangle per tant $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{4x}{c}$

El triangle $\overset{\Delta}{AOH}$ és rectangle per tant $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{c}{2x}$

Considerem el sistema $\begin{cases}\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{4x}{c}\\ \operatorname{tg}\alpha=\dfrac{c}{2x}\end{cases}$ multiplicant ambdues equacions queda,

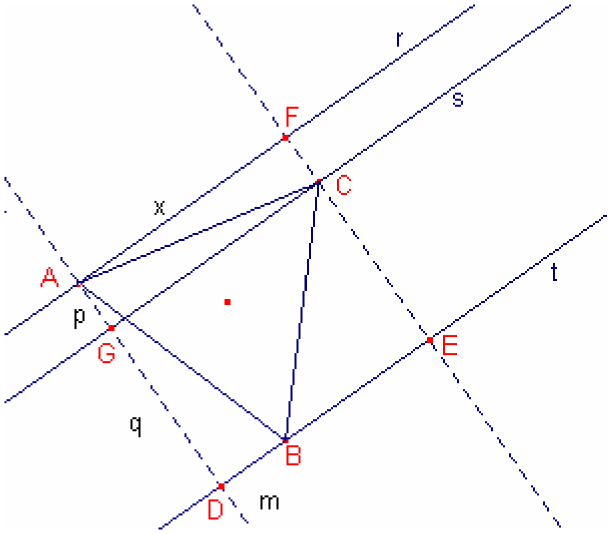
$\operatorname{tg}^2\alpha=2 \quad\Rightarrow\quad \operatorname{tg}\alpha=\sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad \alpha=\operatorname{arctg}\sqrt{2}$

Per tant $\hat{A}=\alpha=\operatorname{arctg}\sqrt{2}$ $\qquad \hat{C}=180º-2\alpha=180º-2\operatorname{arctg}\sqrt{2}$

**Problema 19**

Les rectes r, s, t són paral· leles, s està entre les altres dues a una distància p, q respectivament.
Calculeu el costat d'un triangle equilàter els vèrtexs del qual estan sobre les 3 rectes.

Solució:




Siga la recta f perpendicular a r que passa pel punt A.
Siga la recta g perpendicular a r que passa pel punt C.
Siga el rectangle ADEF que determinen les rectes r, f, t, g.

Siguen $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = a$

Siguen $\overline{AD} = p + q \quad \overline{AF} = x \quad \overline{DB} = m$

El triangle $\overset{\Delta}{AFC}$ és rectangle per tant $a^2 = p^2 + x^2$

El triangle $\overset{\Delta}{ADB}$ és rectangle per tant $a^2 = (p+q)^2 + m^2$

El triangle $\overset{\Delta}{BCE}$ és rectangle per tant $a^2 = q^2 + (x-m)^2$

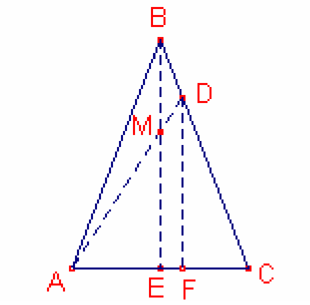
Considerem el sistema $\begin{cases} a^2 = p^2 + x^2 \\ a^2 = (p+q)^2 + m^2 \\ a^2 = q^2 + (x-m)^2 \end{cases}$

Resolent el sistema queda $a = \dfrac{2\sqrt{p^2 + q^2 + pq}}{\sqrt{3}}$

**Problema 20**

Siga un triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$. En el costat $\overline{BC}$ determineu el punt D tal que $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{1}{4}$.

Calculeu $\frac{\overline{BM}}{\overline{ME}}$ on M és la intersecció del segment $\overline{AD}$ i l'altura $\overline{BE}$.




Solució:

Siga $\overline{BC} = 5a \quad \Rightarrow \quad \overline{BD} = a \quad \overline{DC} = 4a$

Siguen $\overline{AE} = y \quad \overline{AF} = x$

El triangle $\overset{\Delta}{EBC}$ és rectangle per tant $\overline{BE} = \sqrt{25a^2 - y^2}$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABE}$, $\overset{\Delta}{FDC}$ són semblants, per tant $\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{FC}}$

$$\frac{\sqrt{25a^2 - y^2}}{y} = \frac{\overline{DF}}{2y - x} \quad (1)$$

Els triangles $\overset{\Delta}{EBC}$, $\overset{\Delta}{FDC}$ són semblants, per tant $\frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{FC}}$

$$\frac{5a}{y} = \frac{4a}{2y - x} \quad \Rightarrow \quad 6y = 5x$$

Substituint en (1)

$$\overline{DF} = \frac{4}{5}\sqrt{25a^2 - y^2}$$

Els triangles $\overset{\Delta}{AME}$, $\overset{\Delta}{ADF}$ són semblants, per tant $\frac{\overline{ME}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AF}}$

$$\frac{\overline{ME}}{y} = \frac{\frac{4}{5}\sqrt{25a^2 - y^2}}{x} \quad \Rightarrow \quad \overline{ME} = \frac{2}{3}\sqrt{25a^2 - y^2}$$

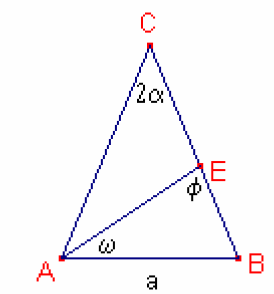
$$\overline{BM} = \overline{BE} - \overline{ME} = \sqrt{25a^2 - y^2} - \frac{2}{3}\sqrt{25a^2 - y^2} = \frac{1}{3}\sqrt{25a^2 - y^2}$$

Aleshores, $$\frac{\overline{BM}}{\overline{ME}} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{25a^2 - y^2}}{\frac{2}{3}\sqrt{25a^2 - y^2}} = \frac{1}{2}$$

**Problema 21**

La base d'un triangle isòsceles és a. L'angle oposat a la base $2\alpha$.
Calculeu la bisectriu sobre el costat lateral.

Solució:




Siguen $\overline{AB}=a$ $\quad \hat{C}=2\alpha \quad \hat{A}=\hat{B}=90^o-\alpha$.

Siga la bisectriu $\overline{AE}$. Siguen $\angle EAB=\omega, \angle AEB=\phi$.

$$\omega=\frac{90^o-\alpha}{2} \qquad \phi=180^o-(\omega+\hat{B})=45^o+\frac{3}{2}\alpha$$

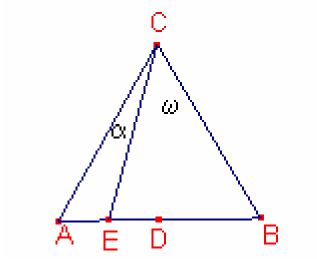
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AEB}$

$$\frac{a}{\sin\phi}=\frac{\overline{AE}}{\sin\hat{B}} \Rightarrow \frac{a}{\sin\left(45^o+\frac{3}{2}\alpha\right)}=\frac{\overline{AE}}{\sin(90^o-\alpha)} \Rightarrow \overline{AE}=\frac{a\cdot\cos\alpha}{\sin\left(45^o+\frac{3}{2}\alpha\right)}$$

**Problema 22**

En un triangle equilàter es traça un segment que uneix un vèrtex i un punt E del costat oposat tal que $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{1}{2}$. Calculeu l'angle que forma aquest segment i cada costat.

Solució:




Siga l'altura $\overline{CD}$.

Siga $\angle ACE=\alpha, \angle ECB=\omega$.

Siga $\overline{AB}=3a \Rightarrow \overline{AE}=a \quad \overline{EB}=2a$

$$\overline{ED}=\overline{AD}-\overline{AE}=\frac{3}{2}a-a=\frac{1}{2}a$$

El triangle $\overset{\Delta}{DCB}$ és rectangle per tant $\overline{CD}=\sqrt{(3a)^2-\left(\frac{3}{2}a\right)^2}=\frac{3a}{2}\sqrt{3}$

El triangle $\overset{\Delta}{DCE}$ és rectangle per tant, $\overline{CE}=\sqrt{\overline{ED}^2+\overline{CD}^2}=\sqrt{\frac{1}{4}a^2+9a^2-\frac{9}{4}a^2}=a\sqrt{28}$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{CEB}$ $\quad \frac{\overline{CE}}{\sin 60^o}=\frac{\overline{EB}}{\sin\omega}$

$$\frac{a\sqrt{28}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2a}{\sin\omega} \Rightarrow \sin\omega=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}}$$

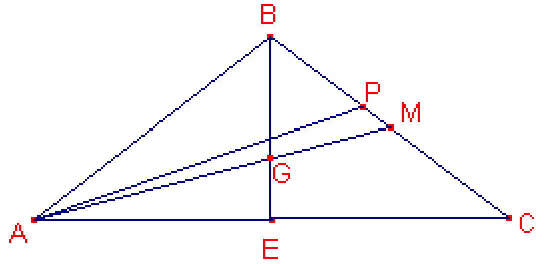
$$\omega=\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}}\right) \qquad \alpha=60^o-\omega=60^o-\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}}\right)$$

**Problema 23**

L'angle de la base d'un triangle isòsceles és $\text{arctg}\frac{3}{4}$.

Calculeu l'angle $\omega$ que formen la mitjana i la bisectriu traçades al costat lateral.

Solució:




Siguen la mitjana $\overline{AM}$, la bisectriu $\overline{AP}$ i el baricentre G.

$\hat{A} = \text{arctg}\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \overline{BE} = 3a, \quad \overline{AE} = 4a$

Per ser G el baricentre $\overline{GE} = \frac{1}{3}\overline{BE} = a$.

Siguen $\angle MAC = \alpha, \angle PAM = \omega$

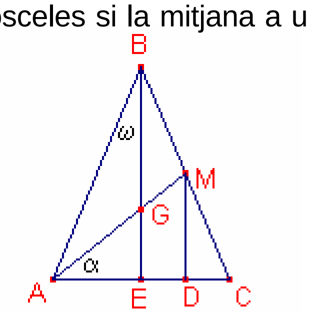
Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{AGE}$ $\quad \text{tg}\alpha = \frac{\overline{GE}}{\overline{AE}} = \frac{a}{4a}$.

Aleshores, $\alpha = \text{arctg}\frac{1}{4} \qquad \omega = \frac{1}{2}\hat{A} - \alpha = \frac{1}{2}\text{arctg}\frac{3}{4} - \text{arctg}\frac{1}{4}$.

**Problema 24**

Determineu l'angle desigual d'un triangle isòsceles si la mitjana a un costat lateral i la base formen un angle $\arcsin\frac{3}{5}$.

Solució:




Siguen la mitjana $\overline{AM}$, el baricentre G

Siguen $\angle MAC = \alpha, \angle ABE = \omega$

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMD}$ $\quad \sin\alpha = \frac{\overline{MD}}{\overline{AM}} = \frac{3}{5}$

$\overline{MD} = 3a \quad \overline{AM} = 5a \qquad \overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AM} = \frac{10}{3}a$

Els triangles $\overset{\Delta}{AMD}$ i $\overset{\Delta}{AGE}$ són semblants, per tant $\frac{3a}{5a} = \frac{\overline{GE}}{\overline{AG}} \quad \Rightarrow \quad \overline{GE} = 2a$

$\overline{BE} = 3\overline{GE} = 6a$

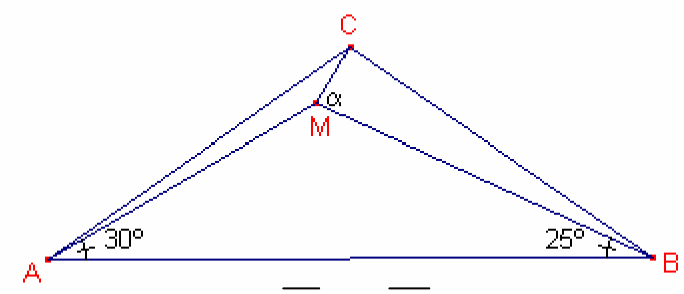
Per ser el triangle $\overset{\Delta}{AGE}$ rectangle $\overline{AE} = \sqrt{\overline{AG}^2 - \overline{GE}^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{3}a\right)^2 - (2a)^2} = \frac{8}{3}a$

Per ser el triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ rectangle,

$\text{tg}\omega = \frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{\frac{8}{3}a}{6a} = \frac{4}{9} \quad \Rightarrow \quad \omega = \text{arctg}\frac{4}{9} \qquad \hat{B} = 2\omega = 2\text{arctg}\frac{4}{9}$

Problema 25

Siga un triangle isòsceles tal que $\hat{B} = 110^o$. En el seu interior es determina el punt M que forma els angles ∠MAC=30º, ∠MCA=25º.
Calculeu l'angle ∠CMB.




Solució:

Siga ∠CMB=α

$\hat{A} = \hat{C} = 35^o$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{MBC}$ $\frac{\overline{BC}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{BM}}{\sin 10^o}$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AMB}$ $\frac{\overline{BM}}{\sin 5^o} = \frac{\overline{BC}}{\sin(235^o - \alpha)}$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BM}} = \frac{\sin\alpha}{\sin 10^o} = \frac{\sin(235^o-\alpha)}{\sin 5^o} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin\alpha}{2\sin 5^o \cos 5^o} = \frac{\sin(235^o-\alpha)}{\sin 5^o} \quad \Rightarrow \quad 2\sin(235^o-\alpha)\cos 5^o = \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad -2\sin(55^o-\alpha)\cos 5^o = \sin\alpha$$

Transformant productes en sumes:

$$-2\left(\frac{1}{2}\sin(60^o-\alpha) + \frac{1}{2}\sin(50^o-\alpha)\right) = \sin\alpha$$

$$-\sin 60^o \cos\alpha + \cos 60^o \sin\alpha - \sin 50^o \cos\alpha + \cos 50^o \sin\alpha = \sin\alpha$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha - \sin 50^o \cos\alpha + \cos 50^o \sin\alpha = \sin\alpha$$

$$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \sin 50^o\right)\cos\alpha = \left(\frac{1}{2} - \cos 50^o\right)\sin\alpha$$

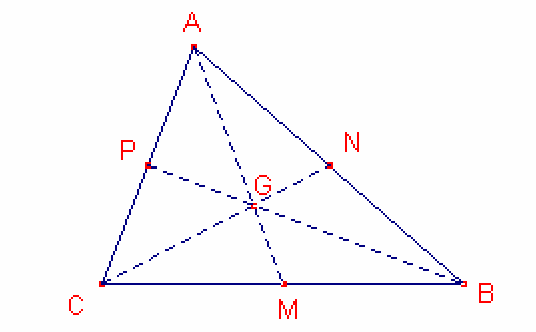
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 50^o}{\frac{1}{2} - \cos 50^o}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 50^o}{\frac{1}{2} - \cos 50^o}\right) = 85^o$$

**Problema 26**

Demostreu que en tot triangle la suma de les mitjanes és major que $\frac{3}{4}$ del perímetre, però menor que el perímetre.

Solució:




Siguen les mitjanes $\overline{AM} = m_a$ $\overline{CN} = m_c$ $\overline{BR} = m_b$. Siga el baricentre G.
Siguen $S = m_a + m_b + m_c$ $P = a + b + c$

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{CGB}$ $\frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c > a$

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{AGC}$ $\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_c > b$

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{AGB}$ $\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b > c$

Sumant les 3 inequacions:

$$\frac{4}{3}(m_a + m_b + m_c) > a + b + c \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}S > P$$

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{AMN}$ $m_a < \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{BNR}$ $m_b < \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}a$

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{CNR}$ $m_c < \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$

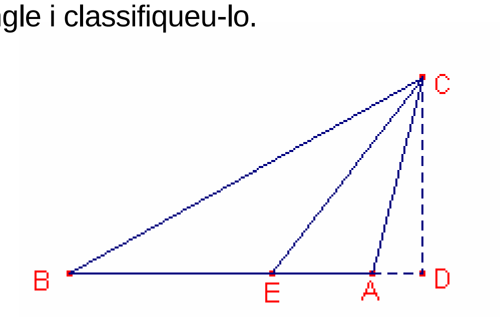
Sumant les desigualtats:

$$m_a + m_b + m_c < a + b + c \quad \Rightarrow \quad S < P$$

Problema 27

La bisectriu d'un angle d'un triangle divideix el costat oposat en segments de 2 cm i 4 cm. L'altura traçada sobre el mateix costat és igual a $\sqrt{15}$ cm.
Determineu el triangle i classifiqueu-lo.

Solució:




Siguen la bisectriu $\overline{CE}$ i l'altura $\overline{CD} = \sqrt{15}$.
Siguen els segments $\overline{BE} = 4$ $\overline{EA} = 2$ $\overline{AD} = x$.
Per la propietat de la proporcionalitat de la bisectriu:

$$\frac{4}{a} = \frac{2}{b} \quad \Rightarrow \quad a = 2b$$

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADC}$ $x^2 + \left(\sqrt{15}\right)^2 = b^2$

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{BDC}$ $(6+x)^2 + \left(\sqrt{15}\right)^2 = b^2$

Considerem el sistema $\begin{cases} a = 2b \\ x^2 + 15 = b^2 \\ x^2 + 36 + 12x + 15 = a^2 \end{cases}$

Els sistema té dues solucions:

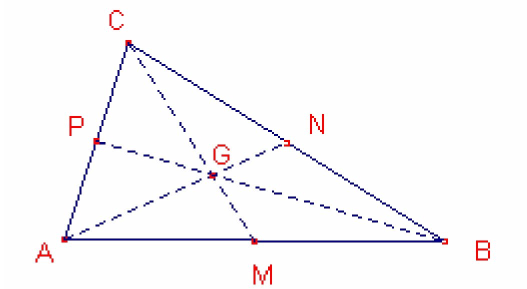
$\begin{cases} a = 8 \\ b = 4 \\ x = 1 \\ c = 6 \end{cases}$ triangle obtusangle ja que $a^2 > b^2 + c^2$

$\begin{cases} a = 4\sqrt{6} \\ b = 2\sqrt{6} \\ x = 3 \\ c = 6 \end{cases}$ triangle obtusangle ja que $a^2 > b^2 + c^2$

Problema 28

Determineu la raó que hi ha entre la suma des quadrats de les mitjanes i la suma dels quadrats dels costats d'un triangle.

Solució:




Siguen les mitjanes $\overline{AN}, \overline{CM}, \overline{BP}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ACM}$

$$\overline{CM}^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2 - bc \cdot \cos \hat{A}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BAN}$ ,

$$\overline{AN}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 - ac \cdot \cos \hat{B}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CBP}$ ,

$$\overline{BP}^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 - ab \cdot \cos \hat{C}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ ,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

Per tant,

$$\frac{\overline{CM}^2 + \overline{AN}^2 + \overline{BP}^2}{a^2 + b^2 + c^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2 - bc \cdot \cos \hat{A} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 - ac \cdot \cos \hat{B} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 - ab \cdot \cos \hat{C}}{a^2 + b^2 + c^2} =$$

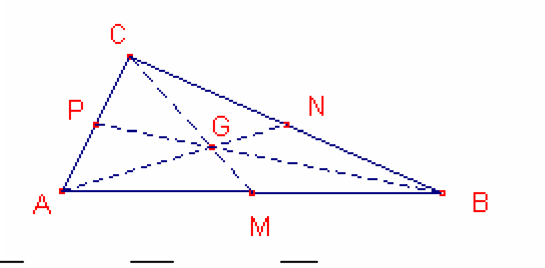
$$= \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2 + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 + \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 + \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2}}{a^2 + b^2 + c^2} =$$

$$\frac{\frac{c^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + a^2 + b^2 + c^2 + \frac{-a^2 - b^2 - c^2}{2}}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4}$$

**Problema 29**

Classifiqueu un triangle sabent que les mitjanes compleixen $m_a^2+m_b^2=5m_c^2$

Solució:




Siguen les mitjanes $\overline{AN}=m_a$ $\overline{CM}=m_c$ $\overline{BP}=m_b$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ACM}$,

$$m_c^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+b^2-bc\cdot\cos\hat{A}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BAN}$,

$$m_a^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+c^2-ac\cdot\cos\hat{B}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CBP}$,

$$m_b^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+a^2-ab\cdot\cos\hat{C}$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$,

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\hat{A}$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\hat{B}$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\hat{C}$$

Per tant,

$$m_a^2=\frac{a^2}{4}+c^2+\frac{b^2-a^2-c^2}{2}=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$$

$$m_b^2=\frac{2a^2+2c^2-b^2}{4},\qquad m_c^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$$

Com que $m_a^2+m_b^2=5m_c^2$ tenim:

$$\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}+\frac{2a^2+2c^2-b^2}{4}=5\frac{2a^2+2b\ \ -c^2}{4}$$

$$2b^2+2c^2-a^2+2a^2+2c^2-b^2=10a^2+10b^2-5c^2$$

Aleshores:

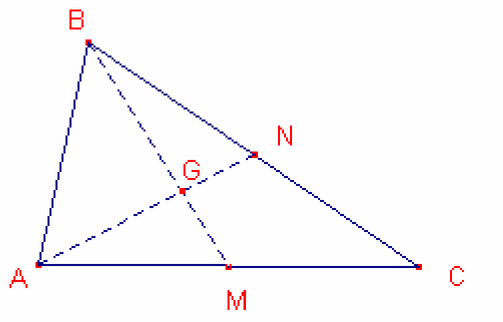
$$a^2+b^2=c^2$$

El triangle és rectangle $\hat{C}=90^o$.

**Problema 30**

Dos costats d'un triangle mesuren a, b i les mitjanes sobre aquests costats formen 90º. Calculeu l'altre costat,

Solució:




Siguen les mitjanes $\overline{AN}$, $\overline{BM}$ siga el baricentre G.

Volem determinar $\overline{AB} = c$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{MNC}$ són semblants

Siguen $\overline{GN} = x$ $\overline{AG} = 2x$ $\overline{GM} = y$ $\overline{BG} = 2y$ $\overline{MN} = \frac{c}{2}$ (propietat del baricentre).

El triangle $\overset{\Delta}{GMN}$ és rectangle, per tant $x^2 + y^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$

El triangle $\overset{\Delta}{AGM}$ és rectangle, per tant $(2x)^2 + y^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$

El triangle $\overset{\Delta}{BGN}$ és rectangle, per tant $x^2 + (2y)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$

Considerem el sistema

$$\begin{cases} (2x)^2 + y^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ x^2 + (2y)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \end{cases} \quad \text{la solució del qual és} \quad \begin{cases} x^2 = \frac{b^2}{15} - \frac{a^2}{60} \\ y^2 = \frac{a^2}{15} - \frac{b^2}{60} \end{cases}$$

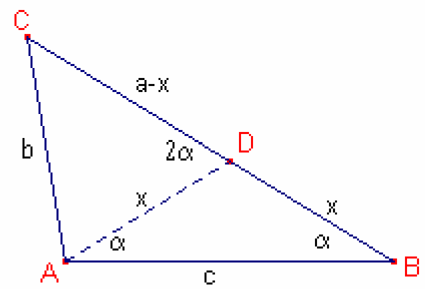
Com que $x^2 + y^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = 4(x^2 + y^2) = \frac{a^2}{5} + \frac{b^2}{5}$.

Per tant $c = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{5}}$

**Problema 31**

En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tracem la bisectriu $\overline{AD}$. Determineu $\overline{BC}$ sabent que $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{AD} = \overline{BD}$.

Solució:




Siga la bisectriu $\overline{AD} = x$
Siga l'angle $\angle CAD = \alpha$
Per la propietat de proporcionalitat de la bisectriu:

$$\frac{c}{x} = \frac{b}{a-x} \quad (1)$$

Per ser el triangle $\overset{\Delta}{ADB}$ isòsceles $\hat{B} = \alpha$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$ $\overset{\Delta}{DAC}$ són semblants, aleshores $\frac{b}{a} = \frac{x}{c}$ (2)

Considerem el sistema format per (1) i (2)

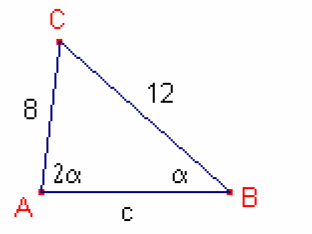
$$\begin{cases} \dfrac{c}{x} = \dfrac{b}{a-x} \\ \dfrac{b}{a} = \dfrac{x}{c} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{c}{\frac{bc}{a}} = \dfrac{b}{a-\frac{bc}{a}} \\ x = \dfrac{bc}{a} \end{cases}$$

Aleshores $a = \sqrt{b^2 + bc}$

**Problema 32**

En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que $\overline{BC} = 12$ $\overline{AC} = 8$ i l'angle $\hat{A} = 2\hat{B}$
Calculeu $\overline{AB}$

Solució:




Siga el costat $\overline{AB} = c$
Siguen $\hat{B} = \alpha$ $\hat{A} = 2\alpha$ $\hat{C} = 180^o - 3\alpha$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$,

$$\frac{12}{\sin 2\alpha} = \frac{8}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin(180^o - 3\alpha)}$$

$$\frac{12}{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{8}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\alpha(4\cos^2\alpha - 1)}$$

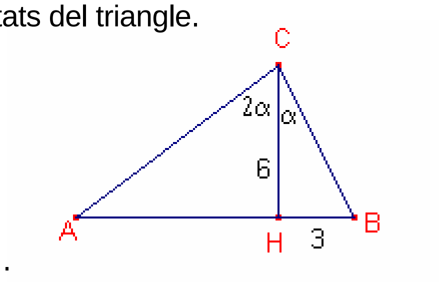
$$\frac{6}{\cos\alpha} = 8 = \frac{c}{4\cos^2\alpha - 1}$$

Aleshores, $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ $c = 8(4\cos^2\alpha - 1) = 10$.

**Problema 33**

L'altura d'un triangle mesura 6 cm i divideix l'angle en una proporció 2:1 i la base en 2 segments el menor dels quals mesura 3 cm.
Determineu els costats del triangle.

Solució:




Siga l'altura $\overline{CH}=6$.
Siga el segment $\overline{HB}=3$.
Siga els angles $\angle HCB = \alpha \quad \angle ACH = 2\alpha$.

El triangle $\overset{\Delta}{CHB}$ és rectangle, per tant, $a=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$

$$\sin\alpha=\frac{3}{5\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{5} \qquad \cos\alpha=\frac{6}{5\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{5} \qquad \mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{2}$$

El triangle $\overset{\Delta}{ACH}$ és rectangle, per tant,

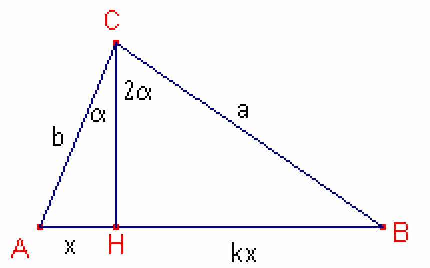
$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{c-3}{6} \quad\Rightarrow\quad \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{c-3}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{2\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{c-3}{2} \quad\Rightarrow\quad c=11$$

$$b=\sqrt{\overline{AH}^2+6^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10.$$

**Problema 34**

L'altura d'un triangle divideix els angles en proporció 2:1 i la base en dos segments en proporció k:1 (k>0).
Determineu l'angle major de la base.

Solució:




Siga l'altura $\overline{CH}$. Siguen els angles $\angle ACH = \alpha$ $\angle BCH = 2\alpha$

$\hat{A} = 90º{-}a$ $\hat{B} = 90 - 2\alpha$

Siguen els segments $\overline{AH} = x$ $\overline{HB} = kx$

El triangle $\overset{\Delta}{ACH}$ és rectangle, per tant, $\sin\alpha = \dfrac{x}{b}$

El triangle $\overset{\Delta}{CHB}$ és rectangle, per tant, $\sin 2\alpha = \dfrac{kx}{a}$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$,

$$\frac{a}{\sin(90º-\alpha)} = \frac{b}{\sin(90º-2\alpha)} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos 2\alpha}$$

Considerem el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\cos\alpha} = \dfrac{b}{\cos 2\alpha} \\ \dfrac{a}{bk} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} \end{cases}$$

Dividint ambdues equacions:

$$k = \frac{2\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha - 1} \quad \Rightarrow \quad \cos^2\alpha = \frac{k}{2(k-1)}$$

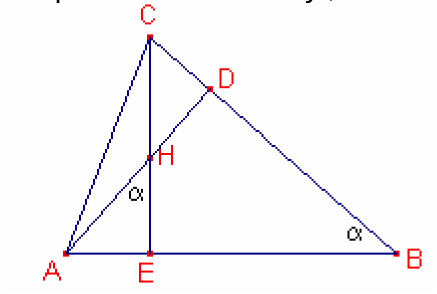
per tant, $\cos\alpha = \sin(90º-\alpha) = \sqrt{\dfrac{k}{2(k-1)}}$ $\Rightarrow$ $90º-\alpha = \arcsin\sqrt{\dfrac{k}{2(k-1)}}$

Nota: Es pot observar que $k > 2$ ja que $\dfrac{k}{2(k-1)} < 1$ i $\dfrac{k}{2(k-1)} > 0$

**Problema 35**

En un triangle acutangle $\overset{\Delta}{ABC}$ l'angle agut format per les altures $\overline{AD}, \overline{CE}$ és $\alpha = \angle ABC$. Sabent que $\overline{AD} = x$ $\overline{CE} = y$, calculeu $\overline{AC}$

Solució:




Siga $\hat{B} = \alpha$, aleshores l'angle $\angle AHE = \alpha$.

El triangle $\overset{\Delta}{DAB}$ és rectangle, per tant, $\sin\alpha = \dfrac{x}{\overline{AB}}$ $\Rightarrow$ $\overline{AB} = \dfrac{x}{\sin\alpha}$

El triangle $\overset{\Delta}{ECB}$ és rectangle, per tant, $\sin\alpha = \dfrac{y}{\overline{BC}}$ $\Rightarrow$ $\overline{BC} = \dfrac{y}{\sin\alpha}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos\alpha$$

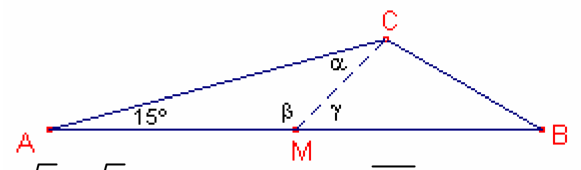
Per tant, $\overline{AC}^2 = \dfrac{x^2}{\sin^2\alpha} + \dfrac{y^2}{\sin^2\alpha} - \dfrac{2xy \cdot \cos\alpha}{\sin^2\alpha}$

Aleshores: $\overline{AC} = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos\alpha}}{\sin\alpha}$

**Problema 36**

La base d'un triangle és 4. La mitjana sobre la base és $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ un dels angles aguts de la base és 15º.
Calculeu l'angle agut entre la mitjana i la base.

Solució:




Siga la mitjana $\overline{CM} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Siga el segment $\overline{AM} = 2$

Siguen els angles $\hat{A} = 15º$ $\angle CMB = \gamma$ $\angle MCA = \alpha$ $\angle AMC = \beta$

$\sin 15º = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ACM}$,

$\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sin 15º} = \dfrac{2}{\sin\alpha}$, per tant, $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\alpha = 30º$ o $\alpha = 150º$

Les dues solucions són:

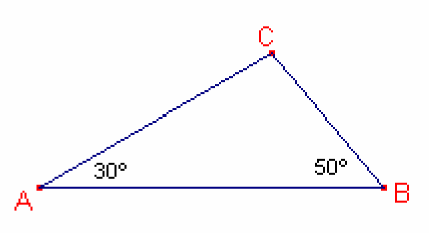
a) $\beta = 180º - (15 + \alpha) = 135º$ $\gamma = 180º - \beta = 45º$

b) $\beta = 180º - (15 + \alpha) = 15º$ $\gamma = 180º - \beta = 165º$

**Problema 37**

En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $\hat{A} = 30^o$ $\hat{B} = 50^o$. Demostreu que $c^2 = b(a+b)$.

Solució:




$\hat{C} = 180^o - (A + B) = 100^o$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$,

$$\frac{a}{\sin 30^o} = \frac{b}{\sin 50^o} = \frac{c}{\sin 100^o}$$

$$2a = \frac{b}{\sin 50^o} = \frac{c}{2\sin 100^o} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{c}{4\sin 50^o \cos 50^o}, \quad b = \frac{c}{2\cos 50^o}$$

$$b(a+b) = \frac{c}{2\cos 50^o}\left(\frac{c}{4\sin 50^o \cos 50^o} + \frac{c}{2\cos 50^o}\right) = c^2 \frac{1}{2\cos 50^o}\left(\frac{1+2\sin 50^o}{4\sin 50^o \cos 50^o}\right)$$

Cal demostrar que $\frac{1}{2\cos 50^o}\left(\frac{1+2\sin 50^o}{4\sin 50^o \cos 50^o}\right) = 1$

$8\cos 50^o \sin 50^o \cos 50^o = 4\sin 100^o \text{co}50^o = 2(\sin 150^o + \sin 50^o) = 1 + 2\sin 50^o$

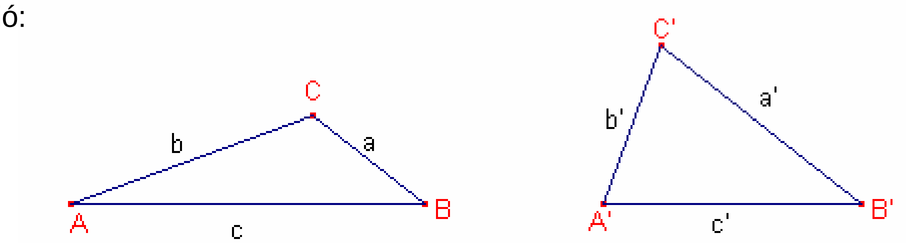
Per tant, podem concloure que:

$b(a+b) = c^2$

**Problema 38**

Siguen dos triangles $\overset{\Delta}{ABC}$ $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ tal que $\hat{B}=\hat{B}'$ $\hat{A}+\hat{A}'=180^o$
Demostreu que $aa'=bb'+cc'$.

Solució:




Com que $\hat{B}=\hat{B}'$, $\hat{A}+\hat{A}'=180^o$ $\Rightarrow$ $\hat{A}'=180^o-\hat{A}$, $\hat{C}'=\hat{A}-\hat{B}$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$,

$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}$. Per tant, $b=\frac{\sin\hat{B}}{\sin\hat{A}}a$ $c=\frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{A}}a$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $A'\overset{\Delta}{B'}C'$

$$\frac{a'}{\sin\hat{A}'}=\frac{b'}{\sin\hat{B}'}=\frac{c'}{\sin\hat{C}'} \Rightarrow \frac{a'}{\sin(180^o-\hat{A})}=\frac{b'}{\sin\hat{B}}=\frac{c'}{\sin(\hat{A}-\hat{B})}$$

Per tant, $b'=\frac{\sin\hat{B}}{\sin\hat{A}}a'$ $c=\frac{\sin(\hat{A}-\hat{B})}{\sin\hat{A}}a'$

$$bb'+cc'=\frac{\sin^2\hat{B}}{\sin^2\hat{A}}aa'+\frac{\sin\hat{C}\cdot\sin(\hat{A}-\hat{B})}{\sin^2\hat{A}}aa'=$$

$$=aa'\frac{\sin^2\hat{B}+\sin(\hat{A}+\hat{B})\sin(\hat{A}-\hat{B})}{\sin^2\hat{A}}=$$

$$=aa'\frac{\sin^2\hat{B}+(\sin\hat{A}\cos\hat{B}+\cos\hat{A}\sin\hat{B})(\sin\hat{A}\cos\hat{B}-\cos\hat{A}\sin\hat{B})}{\sin^2\hat{A}}=$$

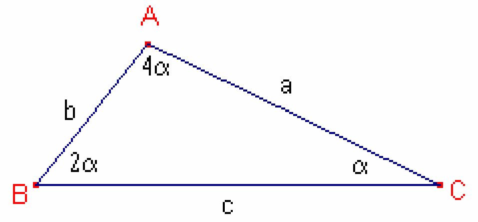
$$=aa'\frac{\sin^2\hat{B}+\sin^2\hat{A}\cos^2\hat{B}-\cos^2\hat{A}\sin^2\hat{B}}{\sin^2\hat{A}}=aa'$$

**Problema 39**

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ els angles del qual estan en proporció 4:2:1

Demostreu que els costats compleixen $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

Solució:




Siguen els angles $\hat{C}=\alpha \quad \hat{B}=2\alpha \quad \hat{A}=4\alpha$

$$7\alpha=180^{\circ} \quad \Rightarrow \quad \alpha=\frac{180^{\circ}}{7}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$,

$$\frac{a}{\sin 4\alpha}=\frac{b}{\sin 2\alpha}=\frac{c}{\sin\alpha}$$

Aleshores:

$$a=\frac{c\cdot\sin 4\alpha}{\sin\alpha}=4c\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha \qquad b=\frac{c\cdot\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=2c\cdot\cos\alpha$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{4c\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha}+\frac{1}{2c\cdot\cos\alpha}=\frac{1}{c}\left(\frac{1+2\cos 2\alpha}{4\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha}\right)$$

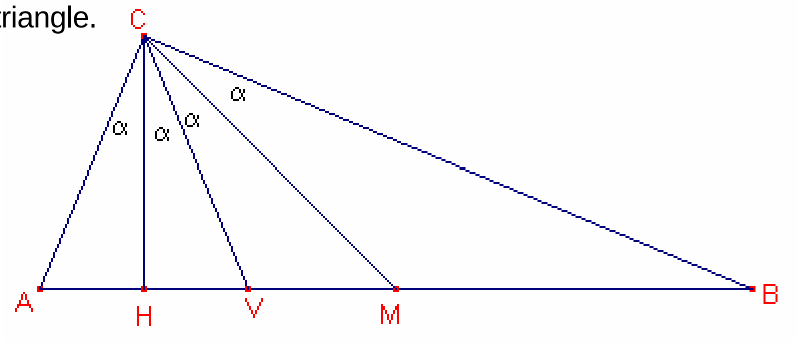
Amb l'ajut de la calculadora demostrem que

$$\frac{1+2\cos 2\alpha}{4\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha}=1$$

**Problema 40**

L'altura, la bisectriu i la mitjana traçades des d'un vèrtex d'un triangle divideixen l'angle en 4 parts iguals.
Determineu els angles del triangle.

Solució:




Siguen l'altura $\overline{CH}$, la bisectriu $\overline{CV}$, la mitjana $\overline{CM}$.
Siguen els angles $\angle ACH=\angle HCV=\angle VCM=\angle MCB=\alpha$.
El punt V està entre H i M.

El triangle $\overset{\Delta}{AHC}$ és rectangle, per tant $\hat{A}=90-\alpha$

El triangle $\overset{\Delta}{CHB}$ és rectangle, per tant $\hat{B}=90^o-3\alpha$

El triangle $\overset{\Delta}{ACV}$ és isòsceles, per tant $\overline{CV}=b$

$\overline{AM}=\overline{MB}=\frac{c}{2}$

Siga $\overline{CM}=x$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AMC}$,

$$\frac{x}{\sin(90^o-\alpha)}=\frac{\frac{c}{2}}{\sin 3\alpha}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{CMB}$,

$$\frac{\frac{c}{2}}{\sin\alpha}=\frac{x}{\sin(90^o-3\alpha)}$$

Dividint ambdues equacions,

$$\frac{\sin(90^o-\alpha)}{\sin(90^o-3\alpha)}=\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} \quad\Rightarrow\quad \frac{\cos\alpha}{\cos 3\alpha}=\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=2\sin 3\alpha\cdot\cos 3\alpha \quad\Rightarrow \sin 2\alpha=\sin 6\alpha \quad\Rightarrow\quad 6\alpha=180^o-2\alpha$$

Aleshores, $\alpha=\frac{180^o}{8}=22^o30'$

Per tant, $\hat{A}=90^o-\alpha=67^o30'$

$\hat{B}=90^o-3\alpha=22^o30'$

$\hat{C}=4\alpha=90^o$

**Problema 41**

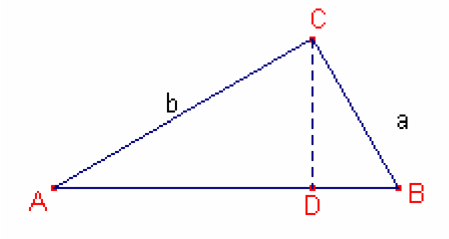
Siga $\overline{CD}$ l'altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Determineu la dependència dels angles $\hat{A},\hat{B}$ sabent que $\overline{CD}^2 = \overline{AD}\cdot\overline{DB}$.

Solució:

Estudiarem dos casos:
1.- $\hat{A},\hat{B}$ angles aguts.
2.- $\hat{A}$ o $\hat{B}$ obtús.

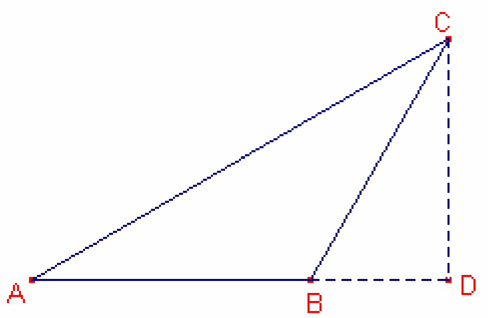
1r cas
Suposem que $\hat{A},\hat{B}$ són angles aguts.




$$a^2+b^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2+\overline{DB}^2+\overline{CD}^2=$$
$$=\overline{AD}^2+\overline{AD}\cdot\overline{DB}+\overline{DB}^2+\overline{AD}\cdot\overline{DB}=$$
$$\overline{AD}\left(\overline{AD}+\overline{DB}\right)+\overline{DB}\left(\overline{AD}+\overline{DB}\right)=\left(\overline{AD}+\overline{DB}\right)^2=c^2$$

Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle, $\hat{C}=90º \Rightarrow A+B=90º$.

2n cas




Suposem que l'angle $\hat{B}$ és obtús.
$b^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2 \quad a^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$,
$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}$$

$$\frac{\sin^2\hat{A}}{\sin^2 B}=\frac{a^2}{b^2}=\frac{\overline{BD}^2+\overline{CD}^2}{\overline{AD}^2+\overline{CD}^2}=\frac{\overline{BD}^2+\overline{AD}\cdot\overline{DB}}{\overline{AD}^2+\overline{AD}\cdot\overline{DB}}=\frac{\overline{BD}\left(\overline{AD}+\overline{BD}\right)}{\overline{AD}\left(\overline{AD}+\overline{BD}\right)}=\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=$$
$$=\frac{-a\cos\hat{B}}{b\cos\hat{A}}=\frac{-\sin\hat{A}\cdot\cos\hat{B}}{\sin\hat{B}\cdot\cos\hat{A}} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin\hat{A}}{\sin\hat{B}}=\frac{-\cos\hat{B}}{\cos\hat{A}} \quad\Rightarrow\quad 2\sin\hat{A}\cdot\cos\hat{A}=-2\sin\hat{B}\cdot\cos\hat{B} \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \sin(2\hat{A})=-\sin(2\hat{B}) \quad\Rightarrow\quad 2\hat{B}=180º+2\hat{A} \quad\Rightarrow$$
$$\hat{B}-\hat{A}=90º$$

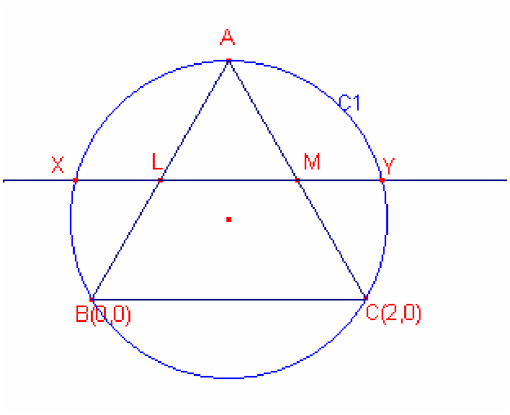
Si $\hat{A}$ és obtús $\hat{A}-\hat{B}=90º$.
Podem concloure que si $\hat{A}$ o $\hat{B}$ obtús $\left|\hat{A}-\hat{B}\right|=90º$

**Problema 42**

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siguen L, M els punts migs dels segments AB, AC, respectivament.

Siga C1 la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
La recta que passa pels punts L, M talla la circumferència C1 en els punts X, Y.

Proveu que $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{\overline{LY}}{\overline{LM}} = \dfrac{\overline{LM}}{\overline{MY}}$




Solució: (Amb coordenades cartesinanes).

Considerem El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, tal que B(0,0), C(2,0).
Per ser el triangle equilàter $A(1,\sqrt{3})$
Les coordenades dels punts L, M són:
$L\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Siga C1 la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de centre O i radi R.

El centre O té coordenades $O\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

El radi de la circumferència circumscrita C1 és: $R=\sqrt{\dfrac{4}{3}}$

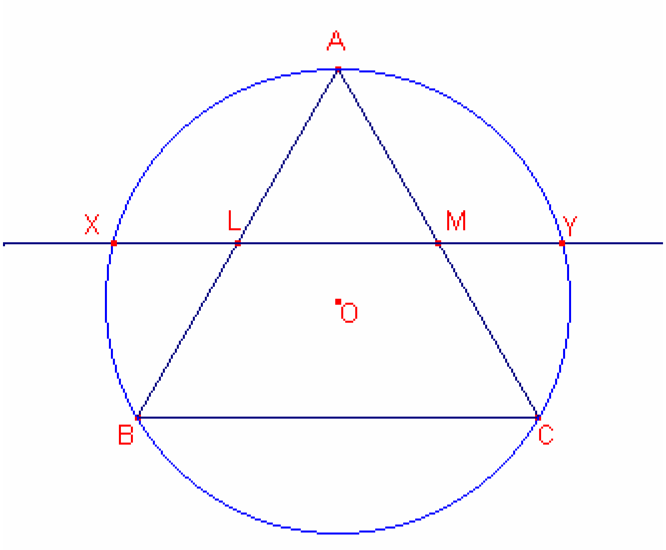
L'equació de la circumferència C1 és: $C1 \equiv (x-1)^2+\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{4}{3}$

L'equació de la recta r que passa pels punts L, M és: $r \equiv y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Les interseccions de la circumferència C1 i la recta r són: $X\left(1-\dfrac{\sqrt{5}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $Y\left(1+\dfrac{\sqrt{5}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\overline{LM}=1$
$\overline{LY}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
$\overline{MY}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$
Aleshores:
$\dfrac{\overline{LY}}{\overline{LM}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$ $\quad \dfrac{\overline{LM}}{\overline{MY}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$

Solució trigonomètrica:




Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $AB = 2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{ALC}$,
$CL = \sqrt{3}$

Aleshores $LM = 1$

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{OLM}$

Per la propietat del baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$

$$OL = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$OC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

L'angle $\angle MLO = 30^{o}$

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{LOY}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{LOY}$,

$$\overline{OY}^2 = \overline{OY}^2 + \overline{LY}^2 - 2 \cdot \overline{OY} \cdot \overline{LY} \cdot \cos 30^{o}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{3} + \overline{LY}^2 - \overline{LY}$$

Simplificant:

$$\overline{LY}^2 - \overline{LY} - 1 = 0$$

Aleshores,

$$\overline{LY} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

**Problema 43**

Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangle rectangle $A = 90^o$.

Si els costats del triangle rectangle estan en progressió geomètrica la raó de proporcionalitat és $\sqrt{\Phi}$

Solució:
Siga r la raó de proporcionalitat.
Els costat del triangle rectangle són $a, ar, ar^2$, on $ar^2$ és la hipotenusa.

Aplicant el teorema de Pitàgores:
$(ar^2)^2 = a^2 + (ar)^2$

$a^2r^4 = a^2 + a^2r^2$
Simplificant,
$r^4 - r^2 - 1 = 0$

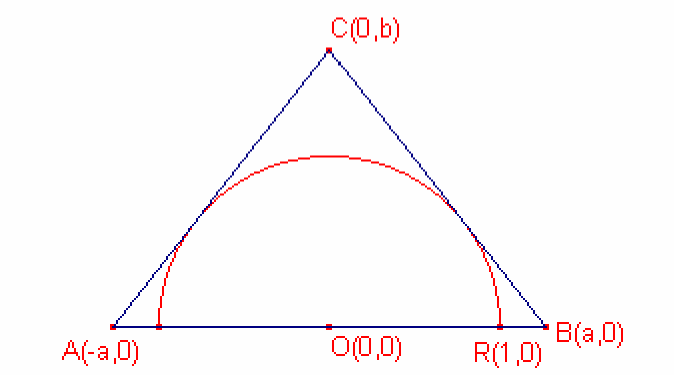
Resolent l'equació: $r^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Aleshores, $r = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\Phi}$

**Problema 44**

De tots els triangles isòsceles circumscrits en un semicercle de radi R determineu el de menor perímetre.
Calculeu també la raó entre l'altura del triangle (sobre el costat desigual) i el radi R.

Solució:




Considerem el sistema de referència cartesià amb origen $O(0,0)$.
Considerem la circumferència de centre $O(0,0)$ i radi $\overline{OR} = 1$ que té per equació: $C_1 \equiv x^2 + y^2 = 1$

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $A(-a,0), B(a,0), C(0,b)$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{OBC}$ el perímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$P(a,b) = 2a + 2\sqrt{a^2 + b^2}$ (1)

Considerem la recta que passa pels punts B, C, $r \equiv y = \frac{-b}{a}(x-a)$

Com que la recta r és tangent a la circumferència $C_1$, el sistema format per les seues equacions té solució única. $\begin{cases} y = \frac{-b}{a}(x-a) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Substituint: $x^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2 - 2\frac{b^2}{a}x - 1 = 0$

Simplificant: $(a^2 + b^2)x^2 - 2ab^2x + a^2b^2 - a^2 = 0$

Per tenir solució única el discriminant de l'equació de segon grau és 0.

$4a^2b^4 - 4(a^2 + b^2)(a^2b^2 - a^2) = 0$

Simplificant: $b^2 = \frac{a^2}{a^2 - 1}$

Aleshores la funció perímetre quedaria:

$P(a) = 2a + 2\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{a^2-1}} = 2a + 2\sqrt{\frac{a^4}{a^2-1}}$ on $a > 1$

Calculem la primera derivada:

$$P'(a) = 2 + \frac{2a^5 - 4a^3}{(a^2-1)^2 \cdot \sqrt{\frac{a^4}{a^2-1}}}$$

Igualant a zero la primera derivada:

$$2 + \frac{2a^5 - 4a^3}{(a^2-1)^2 \cdot \sqrt{\frac{a^4}{a^2-1}}} = 0$$

Simplificant:

$(a^2-1)^2 + (a^3 - 2a)\sqrt{a^2-1} = 0$, $(a^2-1)^2 = -(a^3-2a)\sqrt{a^2-1}$

Elevant al quadrat i simplificant:

$a^4 - a^2 - 1 = 0$

Aleshores, $a^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$, $a = \sqrt{\Phi}$

Per tant, $b^2 = \frac{\Phi}{\Phi - 1} = \Phi^2$

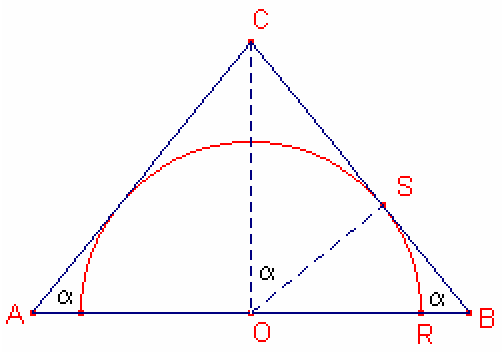
Aleshores, $b = \Phi$

El menor perímetre s'assoleix quan $a = \sqrt{\Phi}, b = \Phi$

El perímetre mínim és $P(\sqrt{\Phi}) = 2\Phi + 2\sqrt{\Phi + \Phi^2} = 2\Phi + 2\sqrt{1 + 2\Phi}$

La proporció entre l'altura i el radi és $b = \Phi$

Solució trigonomètrica:




Considerem la circumferència de centre O i radi $\overline{OR} = 1$.

Siga $\alpha = \angle OBC$, aleshores, $\alpha = \angle SOC$
Siga S el punt de tangència de la circumferència i el triangle $\overline{OS} = 1$.
Aleshores, $\overline{CS} = \text{tg}\alpha$ , $\overline{BS} = \text{ctg}\alpha$ , $\overline{OB} = \dfrac{1}{\sin\alpha}$

Aleshores el perímetre en funció de l'angle $\alpha = \angle OBC$ és:

$$P(\alpha) = 2\left(\text{tg}\alpha + \frac{1}{\text{tg}\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha}\right)$$

Calculem la primera derivada:

$$P'(\alpha) = 2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{-1}{\sin^2\alpha} + \frac{-\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right)$$

Igualant a zero la primera derivada:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{-1}{\sin^2\alpha} + \frac{-\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 0$$

$$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha - \cos^3\alpha = 0$$

$$1 - 2\cos^2\alpha - \cos^3\alpha = 0$$

Substituint $a = \cos\alpha$

$1 - 2a^2 - a^3 = 0$, les solucions són: $a = -1$, $a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $a = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Com que $0 < \cos\alpha < 1$, $\cos\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1}{\Phi}$ on $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Aleshores, $\overline{OB} = \dfrac{1}{\sin\alpha} = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\Phi}$ , $\overline{CS} = \text{tg}\alpha = \sqrt{\Phi}$ , $\overline{BS} = \text{ctg}\alpha = \dfrac{\sqrt{\Phi}}{\Phi}$

També: $\overline{OC} = \Phi$ , per tant la proporció entre l'altura i el radi és $\overline{OC} = \Phi$ .

El perímetre és:

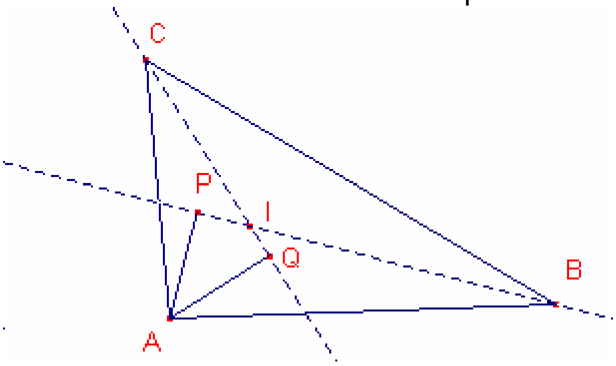
$$P(\alpha) = 2\left(\text{tg}\alpha + \frac{1}{\text{tg}\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha}\right) = 2\left(\sqrt{\Phi} + \sqrt{\Phi} + \frac{\sqrt{\Phi}}{\Phi}\right) = 2\left(2\sqrt{\Phi} + \frac{\sqrt{\Phi}}{\Phi}\right).$$

**Problema 45**

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de incentre I.
Siga P el punt projecció de A sobre la recta que passa pels punts B, I.
Siga Q el punt projecció de A sobre la recta que passa pels punt C, I.

Aleshores, $\frac{\overline{AP}}{\overline{BI}}+\frac{\overline{AQ}}{\overline{CI}}=\cot\left(\frac{A}{2}\right)$

Solució: Problema2102 Crux resolt per Panos E. Tsaoussoglou (Grècia).




Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{APB}$, $\sin\left(\frac{B}{2}\right)=\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}$

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{AQC}$, $\sin\left(\frac{C}{2}\right)=\frac{\overline{AQ}}{\overline{AB}}$

Aleshores, $\overline{AP}=\overline{AB}\cdot\sin\left(\frac{B}{2}\right)$, $\overline{AQ}=\overline{AB}\cdot\sin\left(\frac{C}{2}\right)$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABI}$, $\frac{\overline{BI}}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{\overline{AB}}{\sin\left(180^{o}-\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)\right)}$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ACI}$, $\frac{\overline{CI}}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{\overline{AB}}{\sin\left(180^{o}-\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)\right)}$

Aleshores, $\overline{BI}=\frac{\overline{AB}\cdot\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{C}{2}\right)}$, $\overline{CI}=\frac{\overline{AB}\cdot\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{B}{2}\right)}$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BI}}+\frac{\overline{AQ}}{\overline{CI}}=\frac{\sin\left(\frac{B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}+\frac{\sin\left(\frac{C}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}=\frac{\sin\left(90^{o}-\frac{A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}=\cot\left(\frac{A}{2}\right)$$

**Problema 46**

Un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle si i només si $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$ .

Solució:
$(\Rightarrow)$

Suposem que el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle i $A = 90º$ .
Aleshores, $C = 90º - B$ , $\sin 90º - B = \cos B$
$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 90º + \sin^2 B + \sin^2(90º - B) = 1 + \sin^2 B + \cos^2 B = 1 + 1 = 2$

$(\Leftarrow)$
Suposem que $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$ , $A + B + C = 180º$
Aleshores, $\sin^2 A = 2 - \sin^2 B - \sin^2 C$
$\sin^2 A = 1 - \sin^2 B + 1 - \sin^2 C$
$\sin^2 A = \cos^2 B + \cos^2 C$
$\sin^2(180º - (B + C)) = \cos^2 B + \cos^2 C$
$\sin^2(B + C) = \cos^2 B + \cos^2 C$
$(\sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B)^2 = \cos^2 B + \cos^2 C$
$\sin^2 B \cdot \cos^2 C + \sin^2 C \cdot \cos^2 B + 2 \sin B \cdot \cos C \cdot \sin C \cdot \cos B = \cos^2 B + \cos^2 C$
Simplificant:
$-\cos^2 B \cdot \cos^2 C + \sin B \cdot \cos C \cdot \sin C \cdot \cos B = 0$
Factoritzant:
$\cos B \cdot \cos C(\cos B \cdot \cos C - \sin B \cdot \sin C) = 0$
$\cos B \cdot \cos C \cdot \cos(B + C) = 0$
Aleshores $\cos B = 0$ , o $\cos C = 0$ , o $\cos(B + C) = 0$

És a dir, $B = 90º$ , o $C = 90º$ , o $B + C = 90º$ , en tots tres casos el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle.

# Bibliografia.

PUIG ADAM, P., *Curso de geometría métrica. tomo 1. Fundamentos*. Nuevas gráficas S.A. 8ª ed., Madrid, 1965

PUIG ADAM, P., *Curso de geometría métrica. tomo 2. Complementos.* Nuevas gráficas S.A., 7ª ed., Madrid, 1961.

ROANES MACIAS, E., *Introducción a la geometria.* Anaya, Madrid, 1980.

GELTNER, P.B. PETERSON, D.J. *Geometría.* Ed. Thomson editores. Mèxic. 1998.

VELASCO SOTOMAYOR, G. *Tratado de Geometría.* Ed. Limusa. Mèxic. 1983.

LEVI S. SHIVELY, PH.D. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañia editorial continental. Mèxic. 1972.

COXETER, H.S.M. *Retorno a la geometría.* Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 1. Madrid. 1994.

COXETER, H.S.M. *Fundamentos de geometría*. Ed. Limusa. Mèxic. 1971.

GONZÁLEZ, M. i PALENCIA,J. *Trazado geométrico.* Editorial: els autors. Sevilla.

REDÓN GÓMEZ, A. *Geometría paso a paso.* Ed. Tébar. 2000.

ALSINA, C. i altres, *Invitación a la didáctica de la geometría.* Síntesis, Colección: Matemáticas: cultura y aprendizaje, 12, Madrid, 1992.

MARTÍNEZ RECIO, A. i altres, *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría.* Síntesis, Colección: Matemáticas: cultura y aprendizaje, 16, Madrid, 1989.

GUSIEV, V. i altres, *Prácticas para resolver problemas matemáticos. Geometría.* Editorial Mir. Moscou, 1989.

GREMILLION, D. i altres, *Cabri géomètre II. Manual para Macintosh y MS-DOS.*

LYÚBICH, Yu.I. i SHOR, L.A. *Método cinemático en problemas geométricos.* Editorial Mir Moscou 1978. Col· lecció: Lecciones populares de matemáticas.

NATASON, I.P. *Problemas elementales de máximo y mínimo.* Ed. Mir. Moscou 1977. Col·lecció Lecciones populares de matemáticas.

SMOGORZHEVSKI, A.S. *La regla en construcciones geométricas.* Ed. Mir. Moscou 1988. Col· lecció Lecciones populares de matemáticas.

KOSTOVSKI, A.N. *Construcciones geométricas mediante compás.* Ed. Mir. Moscou. 1984. Col· lecció Lecciones populares de matemáticas.

GUILLÉN SOLER, G. *Poliedros.* Ed. Síntesis. Col. Educacions matemática en secundaria, 15. Madrid. 1997.

FERRER MUÑOZ, J.L. *Superficies poliédricas.* Ed. Paraninfo. Madrid. 1999.

JAIME, A. GUTIÉRREZ, A. *El grupo de la isometrias del plano.* Ed. Síntesis. Col. Educacions matemática en secundaria, 13. Madrid. 1996.

Mathematical Association of America. *Concursos de matemáticas. Geometría*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 8. Madrid. 1996.

Mathematical Association of America. *Concursos de matemáticas. Algebra, Teoría de Números, Trigonometría*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 9 y 10. Madrid. 1996.

AA.VV. *Competencias Matemáticas en Estados unidos*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 11. Madrid. 1996.

GREITZER, S.L. *Olimpiadas MatemáticasI.* Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 2. Madrid. 1994.

KLAMKIN, M.S *Olimpiadas Matemáticas II.* Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 12. Madrid. 1998.

AA.VV. *Matemáticas Recurrentes.* Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 13. Madrid. 1998.

SÁNCHEZ-RUBIO. RIPOLLÉS AMELA. *Manual de mátemáticas para preparación olímpica.*E. Universitat Castelló. Castelló de la Plana. 2000.

PÉREZ FUENTES, R. *Olimpiada Matemética.* Ed autor. Utiel. 1998.

PÉREZ FUENTES, R. *El triángulo y sus cosas.* Ed. Arpe. Utiel-Requena. 1988.

*Col· lecció de problemes de l'Olimpíada Argentina de Cabri.*

REINHARDT, Fritz i SOEDER, Heinrich, *Atlas de matemáticas, 1. Fundamentos, álgebra y geometría.* Alianza atlas, 3, Alianza, 1984.

REINHARDT, Fritz i SOEDER, Heinrich, *Atlas de matemáticas, 2. Análisis y matemática aplicada.* Alianza atlas, 12, Alianza, 1996.

COLLETTE, J.P., *Historia de la matemáticas I* Siglo XXI, Madrid, 1985.

COLLETTE, J.P., *Historia de la matemáticas II.* Siglo XXI, Madrid, 1985

# Algunes adreces d'internet sobre Cabri Géomètre II.

Aquesta és la meua adreça:
http://webs.ono.com/ricardpeiro

http://www.xtec.es/recursos/mates/index.htm
Matemàtiques de la xarxa telemàtica educativa de Catalunya.

http://www-cabri.imag.fr/index.html
Pàgina dels autors del Cabri

http://www.xtec.es/~qcastell/armilar/index.htm
Pàgina de Quim Castellsaguer. Recursos de matemàtiques classificats.
http://www.xtec.es/~qcastell/ttw/ttwcat/portada.html
Tot triangles web. Pàgina de Quim castellsaguer sobre triangles. Macros de Cabri 2. Excel· lent.

http://terra.es/personal/joseantm/
Pàgina de José Antonio Mora. Coordenades i mecanismes amb Cabri (CabriJava). Omnipolíedre (CabriJava).

http://roble.pntic.mec.es/~jarran2/
Pàgina de Juan Manuel Arranz. Applets amb CabriJava.

http://centros5.pntic.mec.es/ies.marques.de.santillana/matem/inddep.htm
Pàgina de matemàtiques de l'IES "Marqués de Santillana" Colmenar Viejo, Madrid. Geometria interactiva (CabriJava, Descartes).

http://www.oma.org.ar/
Olimpíada matemàtica d'Argentina. Bona col·lecció de problemes. Curs de Cabri.

http://www.ac-reunion.fr/pedagogie/icosaweb/
Pàgina francesa (La Reunion) sobre cabri.

http://wwwedu.ge.ch/cptic/clubs/cabri/
Pàgina suïssa sobre Cabri. Lletres de Cabri i un manual.

http://arci01.bo.cnr.it/cabri/index.htm
Pàgina italiana de Cabri. Té dues revistes el Bollettini, i quaderni.

http://atene.provincia.parma.it/~ssrondan/coniche/index.htm
Pàgina italiana sobre còniques (Cabri i Derive).

http://www.xtec.es/~jjareno/index.htm
Pàgina de Joan Jareño, Lloc dedicat als problemes i entreteniments matemàtics, pensant en el seu ús en educació. Presenta problemes, activitats, llibres i enllaços del mes.

http://www.cabri.com.br/
Pàgina del Brasil sobre Cabri. Curs de Cabri. Enllaços, CabriJava...

http://www.mat.ufrgs.br/~edumatec/atividades/sugest.htm
Pàgina del Brasil. Mecanismes amb Cabri.

http://www.peda.com/poly/
Programa sobre políedres. Molt interessant. Programa de funcions.

http://www.xtec.es/~jlagares/matemati.htm
Pàgina de Jordi Lagares. Progama winfun. Integrals. Derivades. Apunts de problemes de Cou2.... D'entrada obligatòria.

http://www.arrakis.es/~fcalbet/index.htm
Pàgina de F. Calvet. Programa funcions a trossos.

http://platea.pntic.mec.es/~jescuder/
Pàgina de Jesús Escudero sobre jocs entre altres coses. Molt interessant.

http://www.arrakis.es/~mcj/pres_0.htm
Un boníssim portal de matemàtiques.

http://www.redemat.com/
Portal molt interessant sobre matemàtiques. D'entrada obligatòria.

http://www.ciudadfutura.com/juegosmensa/
Pàgina de Jocs.

http://perso.wanadoo.fr/chavaignes/aetius.html
Geometria interactiva. En francés. Autor: Sylvain DESHAYES.

http://poncelet.math.nthu.edu.tw/disk3/cabrijava/index.htm
Pàgina xinesa molt completa de geometria CabriJava.

http://www.mowmowmow.com/math/cabri/index_e.htm
Altra pàgina xinesa amb CabriJava.

http://www.sciences.univ-nantes .fr/physique/perso/gtulloue/index.html
Pàgina d'applets cabri creada per Genevieve Tulloue de la universitat de Nantes (França). Conté, entre d'altres coses: Còniques, Políedres, Electricitat, Mecànica.... Una pàgina molt completa.

http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/enseignement/tp/optique/index.html
Pàgina d'applets cabri de la universitat de Nantes (França). Conté òptica.

http://teleline.terra.es/personal/jariasca/
Pàgina de José María Arias. Derive, Cabri, Excel, curiositats....

http://www.ies.co.jp/math/java/index.html
Pàgina japonesa amb applets de geometria interactiva (CabriJava i altres)

http://www.geocities.com/trianguloscabri/
Pàgina de Ricardo Barroso. Problemes quinzenals sobre triangles. Applets amb CabriJava.

http://www.iesarroyo.com/index.htm
Pàgina de matemàtiques de l'IES "Arroyo de Miel" Benalmádena. Málaga. Exercicis per a l'ESO.

http://www.upv.es/derive/index.html
Pàgina del Derive en espanyol. Associació d'usuaris.
http://eulero.ing.unibo.it/~barozzi/Net_Elenco_schede.html
Curs de Derive en italià.

http://chronomath.irem.univ-mrs.fr/
Diccionari de matemàtiques en francés.

http://perso.club-internet.fr/rferreol/encyclopedie/courbes2d/courbes2dsp.shtml
Diccionari de corbes. En francés i espanyol.

http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html
Diccionari visual de corbes. En anglés.

http://www2.evansville.edu/ck6/
1114 teoremes sobre triangles. ENCICLOPÈDIA DELS CENTRES D'UN TRIANGLE (ETC). Pàgina de Clark Kimberling.

http://imozas.eresmas.com/
Pàgina d'Idelfonso Mozas. Apunts de matemàtiques per a l'ESO i el batxillerat i també per a la facultat. Enllaços d'astronomia.

Índex

pàgina
Coneixements preliminars....5
Angles de la circumferència....5
Teorema de Tales....6
Triangles semblants....7
Criteris de semblança....7
Quadrilàters cíclics....8
Propietat....8
Teorema de Ptolomeu....9
Potència d'un punt respecte d'una circumferència....11
Teorema de Pitàgores....12
Teorema de l'altura i del catet....14

Trigonometria....15
Raons trigonomètriques d'un angle agut....15
Relacions fonamentals....15
Raons trigonomètriques de la suma (resta) de dos angles....15
Raons trigonomètriques de l'angle doble....15
Raons trigonomètriques de l'angle meitat....16
Transformacions de sumes en productes....16
Transformacions de productes en sumes....16

Teorema dels sinus....17
Teorema del cosinus....18
Teorema de la tangent....19

TRIANGLES....20
Definició....20
Igualtats de triangles. Criteris d'igualtat....20
Classificació dels triangles.
Propietats:....20
La suma de dos costats és major que l'altre costat....21
La suma dels angles d'un triangle mesura 180º....22
Altres elements d'un triangle....22
Mitjanes i baricentre....22
Propietat: les tres mitjanes es creuen en un punt....22
Propietat del baricentre....23
Propietat: mesura d'una mitjana....23
Mediatrius i circumcentre....24
Propietat: les tres mediatrius es creuen en un punt....24
Propietat: càlcul del diàmetre del cercle circumscrit al triangle....24
Bisectrius i incentre....25
Propietat: les tres bisectrius es creuen en un punt....25
Propietat de la bisectriu....25
Les circumferències exinscrites....26
Altures i ortocentre....29
Propietat: les tres altures es creuen en un punt....29
Propietat: càlcul de l'altura d'un triangle en funció dels costats....30
Triangle òrtic....31

Àrea d'un triangle....................32
Propietat....................32
Fórmula d'Heró....................32
Fórmules trigonomètriques....................32
Fórmula amb el radi de la circumferència circumscrita....................33
Fórmula amb el radi de la circumferència inscrita....................33
Propietat de l'altura, bisectriu i mitjana d'un triangles....................34

TEOREMES ....................35

Els teoremes de Napoleó....................37
Teorema 1. Demostració trigonomètrica....................37
Teorema 1. Demostració sintètica....................39
Teorema 2....................42
Teorema de les àrees dels triangles de Napoleó....................44
Teorema 3....................45
Generalització del teorema de Napoleó....................46
Punts de Napoleó....................47

Teoremes de Menelau i de Ceva....................48
Teorema de Menelau. Demostració vectorial....................48
Teorema de Menelau. Demostració sintètica....................49
Teorema de Ceva. Demostració vectorial....................50
Teorema de Ceva. Demostració sintètica....................51
Teorema de Von Aubel....................52
Teorema: recta d'Euler....................53

Teorema de Morley....................54

La circumferència d'Euler....................56

La recta de Simson....................58
Teorema de recta de Simson....................58
Propietats de la recta de Simson....................60
Teorema d'Stewart....................61
Teorema de E. Catalan....................62

Set teoremes sobre radis....................63
Teorema d'Euler....................67
Teorema de Carnot....................68
Quatre teoremes sobre triangles equilàters....................70
Teorema de Viviani....................73
Tres teoremes sobre l'ortocentre i l'altura....................76
Quatre teoremes sobre el baricentre i les mitjanes....................77
Tres teoremes sobre triangles rectangles....................79
Dos teoremes sobre un triangle i 3 quadrats sobre els costats....................82
Teorema de Cross....................84
Altes teoremes sobre triangles....................85
Coordenades cartesianes del baricentre....................85
Propietat vectorial del baricentre....................86

PUNTS DEL TRIANGLE ........................................................................ 87
Punt de Miquel ........................................................................ 89
Punt de Gergonne ........................................................................ 89
La circumferència d'Adams ........................................................................ 90
Punt de Nagel ........................................................................ 90
Punt de Lemoine ........................................................................ 91
Punt de Grebe ........................................................................ 91
Punt de Brocard ........................................................................ 92
Punt pivot ........................................................................ 92
Mittenpunkt ........................................................................ 93
Punt d'Apoloni ........................................................................ 93
Punt d'Exeter ........................................................................ 94
Punt de Clawson ........................................................................ 94
Punt de Schiffler ........................................................................ 95
Punts de Malfatti. ........................................................................ 95

PROBLEMES ........................................................................ 97
Enunciats ........................................................................ 99
Solucions ........................................................................ 103

Bibliografia ........................................................................ 141