Triangles pitagòrics 3:4:5 a partir d’un quadrat
CP 400

Ricard Peiró i Estruch

A Maurici, in memoriam

Triangles pitagòrics 3:4:5 a partir d’un quadrat CP 400

L’ensenyança de la geometria hauria de ser nucli central en el currículum escolar ja que ofereix resultats interessants així com raonaments i metodologies formatives. La geometria es distingeix per la claredat i la senzillesa dels enunciats. Resoldre problemes de geometria és una tasca que permet dibuixar el problema abans de començar la seua resolució i donar la intuïció del problema. L’ajut de la calculadora gràfica permet provar la conjectura del problema.

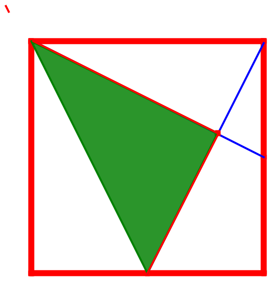
La calculadora CP400 de Casio permet a l’usuari fer construccions geomètriques en el plànol així com provar la conjectura del problema. Aquests processos porten implícits procediments d’anàlisi, comprovació, experimentació, i investigació, procediments que motiven l’activitat constructiva de l’alumnat.

Les construccions són molt intuïtives i interactives.
La introducció de la calculadora CP400 en l’aula, comporta un gran canvi metodològic. Permet l’anàlisi dels resultats agilitant els processos de càlcul i ajuden a la visualització de situacions difícils d’abstraure a partir d’una expressió verbal o a la pissarra.

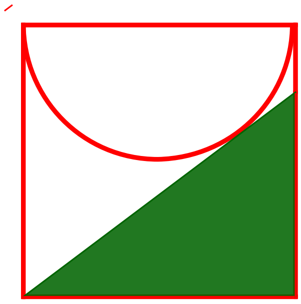
Els que coneguérem al Maurici vam aprendre no sols la utilització de la calculadora, també la necessària introducció en l’ensenyament al llarg de molts cursos.

He resolt 5 problemes de geometria recreativa proposats per Paul Yiu. Alguns d’ells són de geometria japonesa “sangaku”.

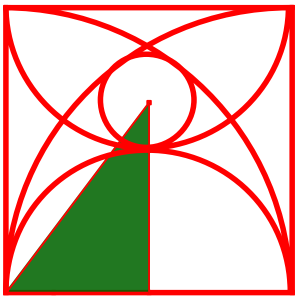
Problema 1
El triangle ombrejat té els costats en proporció $3:4:5$.



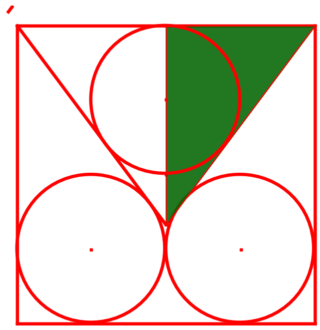
Problema 2
El triangle ombrejat té els costats en proporció $3:4:5$.



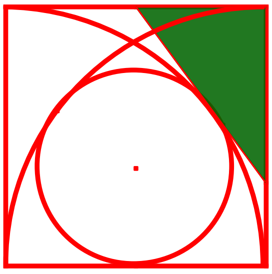
Problema 3
El triangle ombrejat té els costats en proporció $3:4:5$.



Problema 4
El triangle ombrejat té els costats en proporció $3:4:5$.

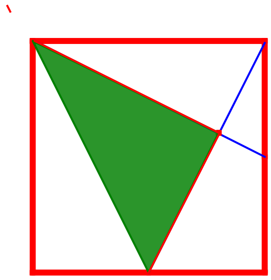


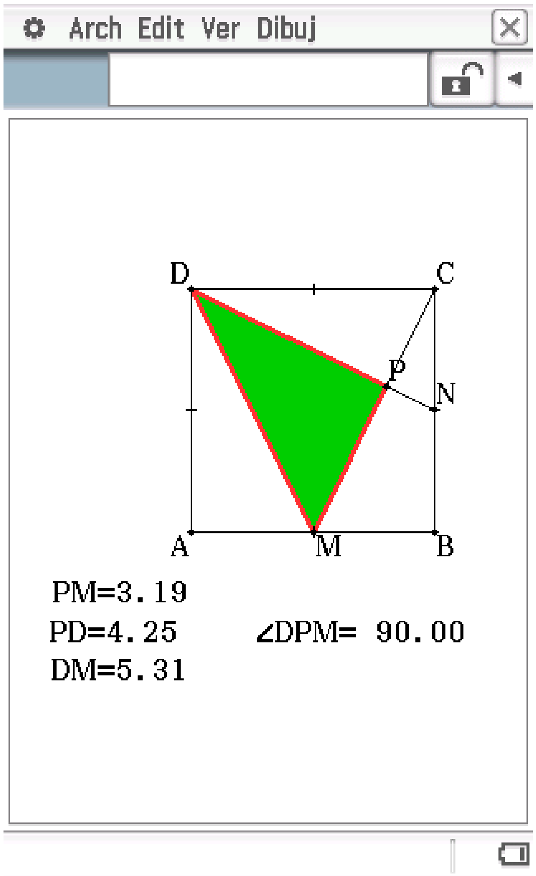
Problema 5
El triangle ombrejat té els costats en proporció $3:4:5$.

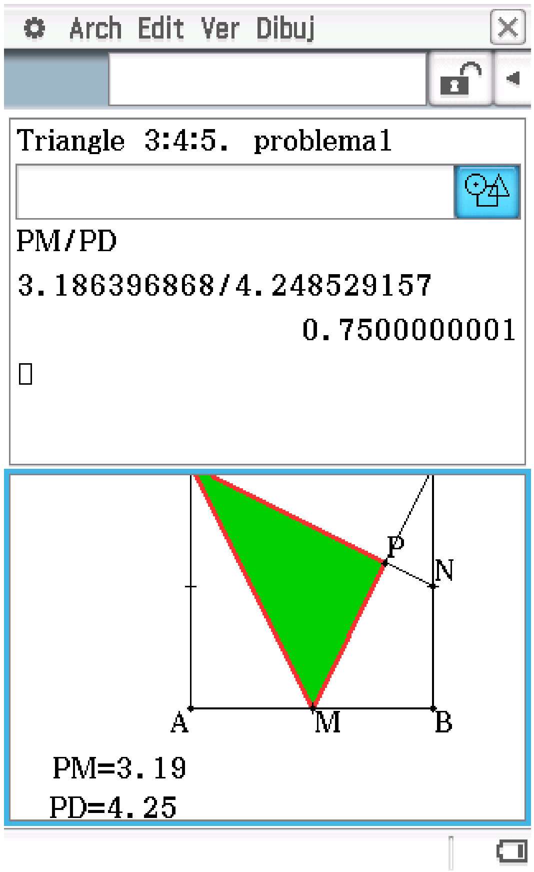


Problema 1

El triangle ombrejat té els costats en proporció $3:4:5$.

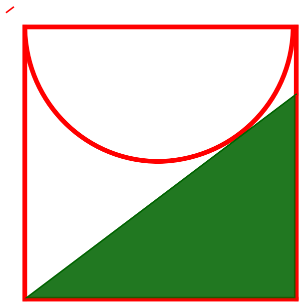


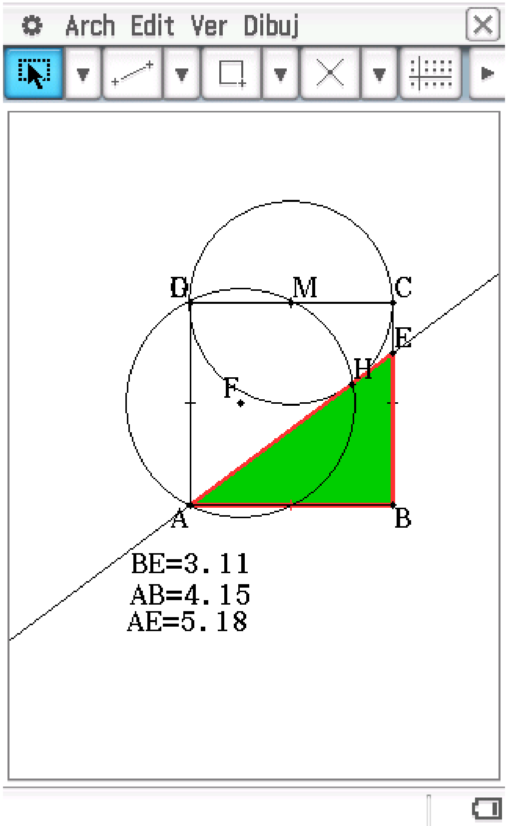


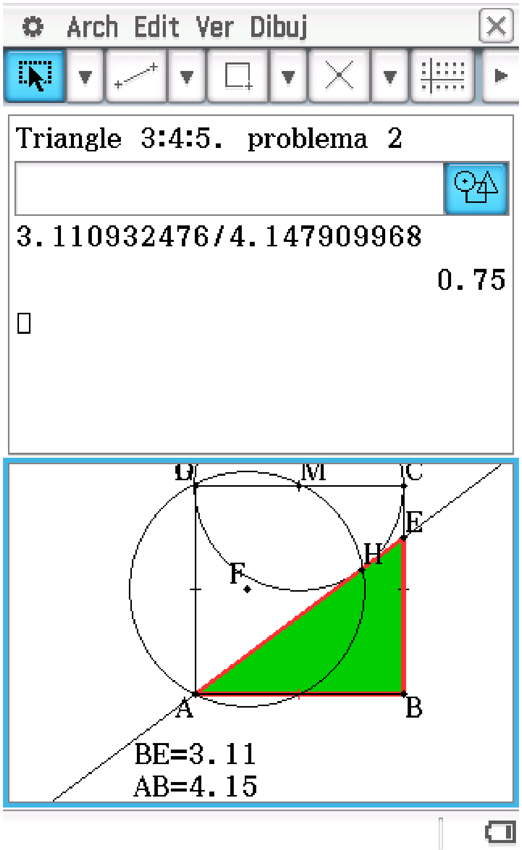


Problema 2

El triangle ombrejat té els costats en proporció $3:4:5$.

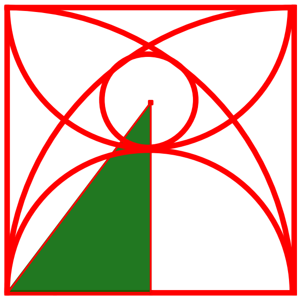


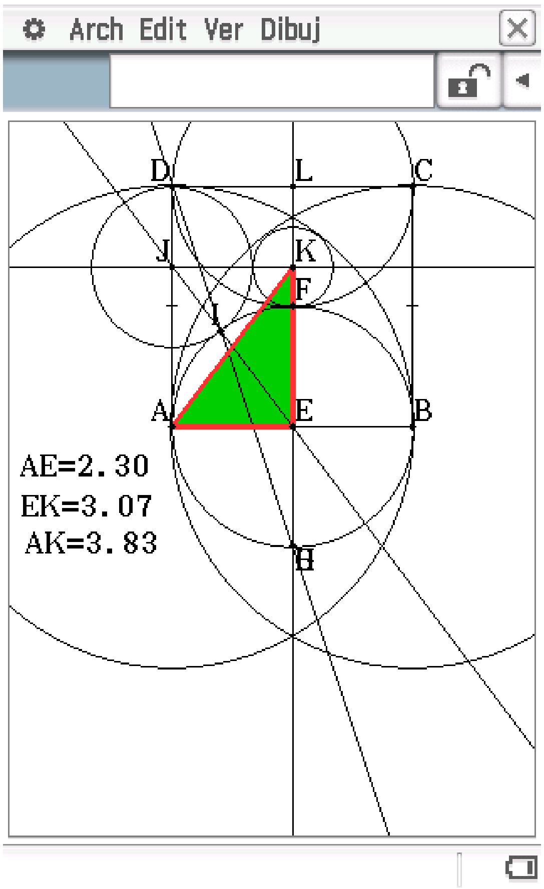


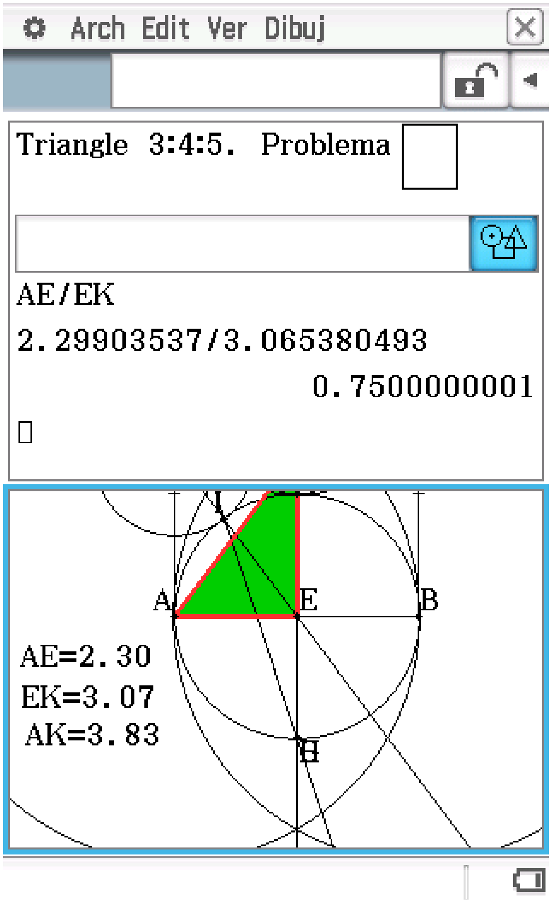


Problema 3

El triangle ombrejat té els costats en proporció $3:4:5$.

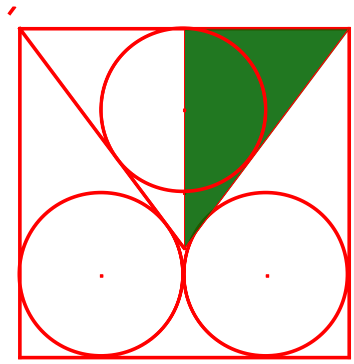


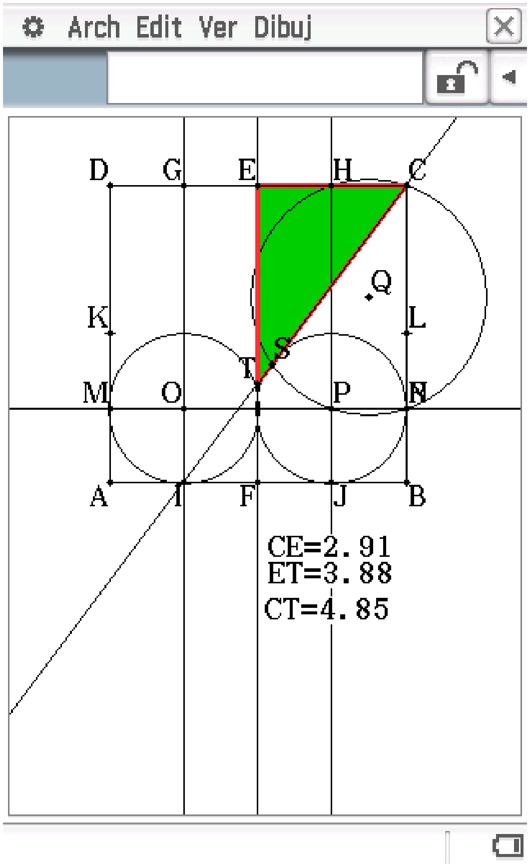


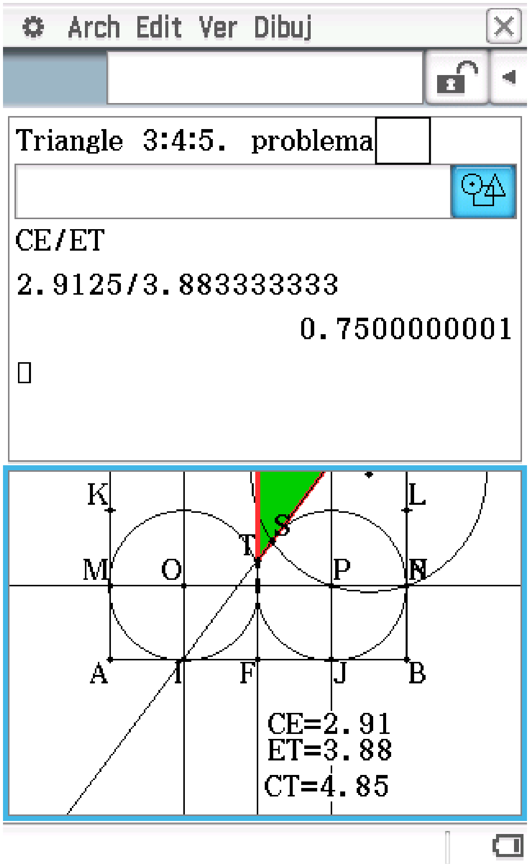


Problema 4

El triangle ombrejat té els costats en proporció $3:4:5$.

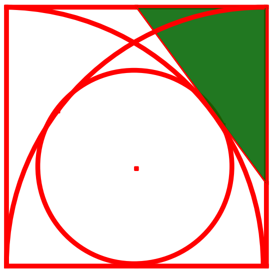


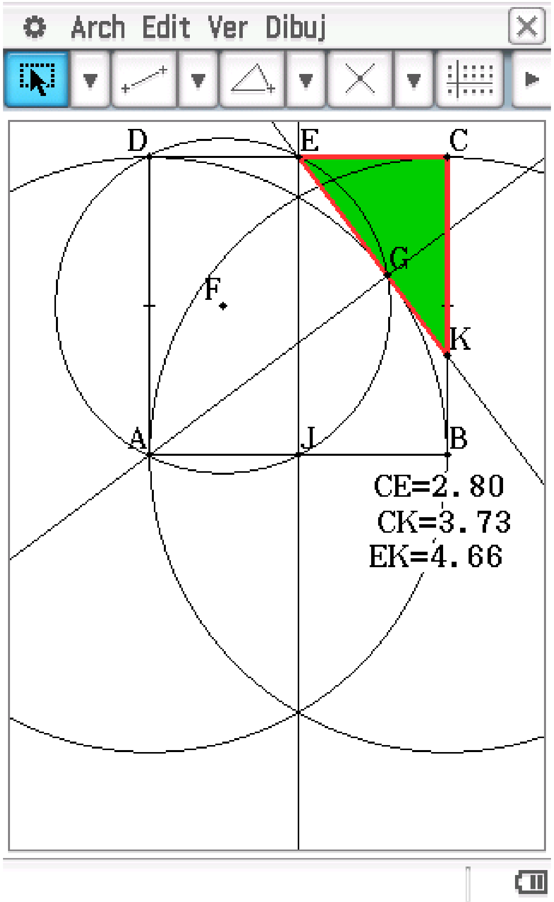


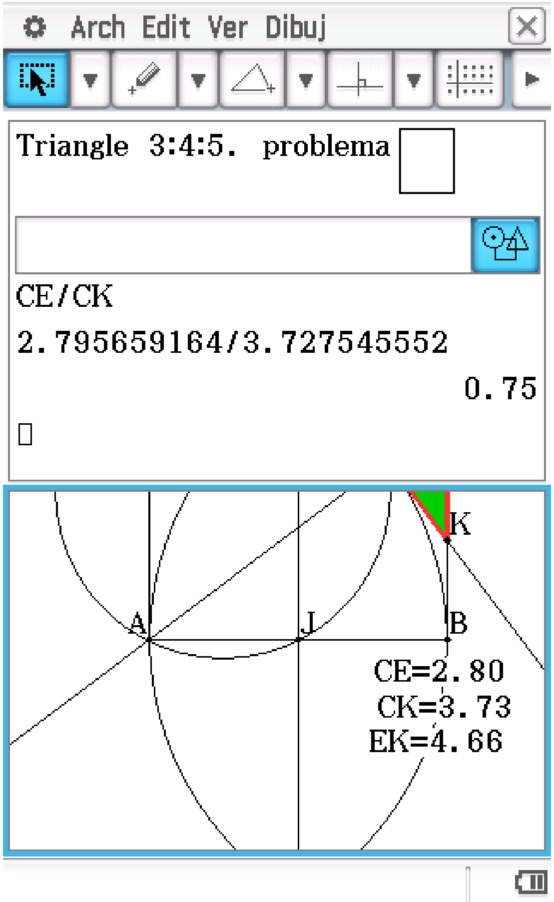


Problema 5

El triangle ombrejat té els costats en proporció $3:4:5$.

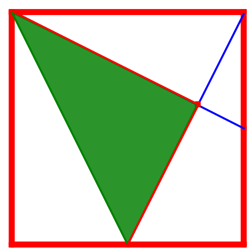






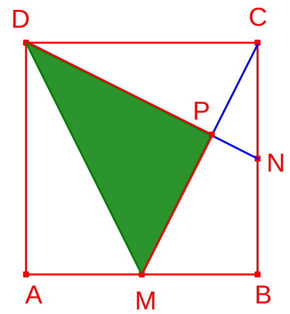
Problema 1

El triangle ombrejat té els costats en proporció $3:4:5$.



Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB}=c$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle

$$\overline{AM}=\frac{1}{2}c.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DAM}$:

$$\overline{DM}=\frac{\sqrt{5}}{2}c.$$

$\angle CDN=\angle BCM$, aleshores, $\angle CDP$, $\angle DCP$ són complementaris.

Per tant, $\angle DUC=90^{o}$.

El triangle $\overset{\Delta}{DPN}$ és rectangle $\angle DPN=90^{o}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DAM}$, $\overset{\Delta}{DUC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

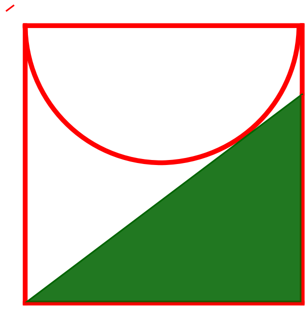
$$\frac{\overline{DP}}{c}=\frac{c}{\frac{c}{2}\sqrt{5}}.$$

$$\overline{DP}=\frac{2\sqrt{5}}{5}c.$$

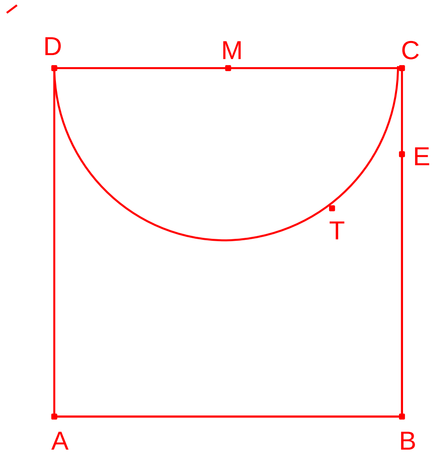
$$\frac{\overline{DP}}{\overline{DM}}=\frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}c}{\frac{\sqrt{5}}{2}c}=\frac{4}{5}.$$

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{DPM}$ és un triangle $\overline{DP}:\overline{PM}:\overline{DM}=4:3:5$.

Problema 2
El triangle ombrejat té els costats en proporció $3:4:5$.



Solució:



Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$.
Siga T el punt de tangència de la circumferència i la recta AE.
$\overline{AT} = \overline{AD} = c$.
Siga $\overline{BE} = x$.
$\overline{EC} = \overline{ET} = c - x$.
$\overline{AE} = 2c - x$.

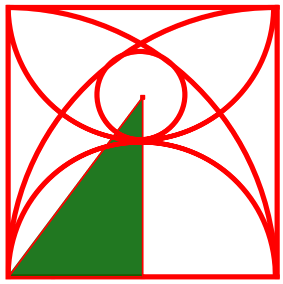
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABE}$:
$(2c - x)^2 = x^2 + c^2$.
$4c^2 - 4cx + x^2 = x^2 + c^2$. Simplificant:
$\frac{x}{c} = \frac{3}{4}$.

Els catets del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ estan en proporció $\overline{BE} : \overline{AB} = 3 : 4$.

Aleshores, els costats del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ estan en proporció $\overline{BE} : \overline{AB} : \overline{AE} = 3 : 4 : 5$.

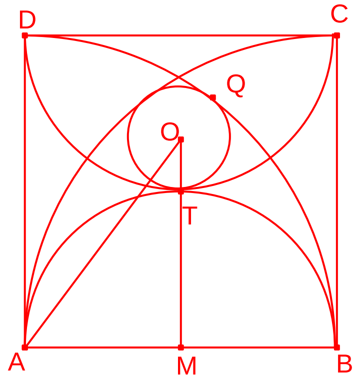
Problema 3

El triangle ombrejat té els costats en proporció $3:4:5$.



Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB}=c$.



Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

$\overline{AM}=\frac{1}{2}c$.

Siga T la intersecció de les dues semicircumferències.

Siga $\overline{MT}=\overline{AM}=\frac{1}{2}c$.

Siga O el centre de la circumferència menuda.

Siga $\overline{OT}=\overline{OQ}=x$ el radi.

$\overline{OM}=\frac{1}{2}c+x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:

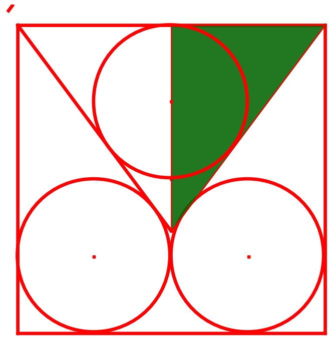
$(c-x)^2=\left(\frac{1}{2}c+x\right)x^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2$. Simplificant: $x=\frac{1}{6}c$.

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{OM}}=\frac{\frac{1}{2}c}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)c}=\frac{3}{4}.$$

Aleshores, els costats del triangle $\overset{\Delta}{MCP}$ estan en proporció $\overline{AM}:\overline{OM}:\overline{AO}=3:4:5$.

Problema 4

El triangle ombrejat té els costats en proporció $3:4:5$.



Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$.

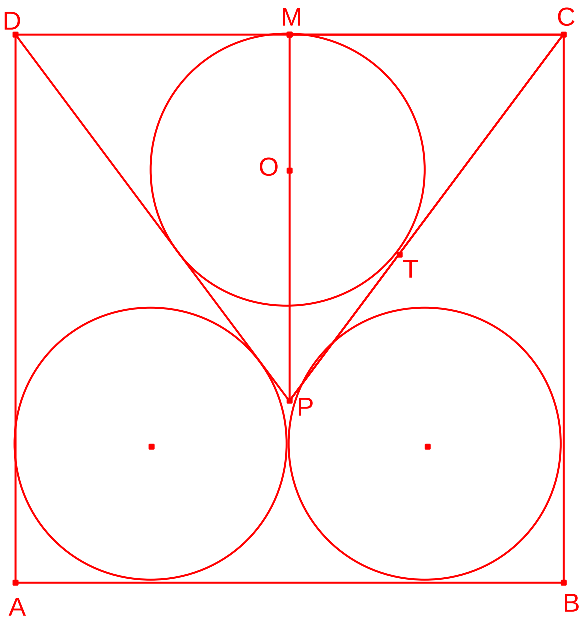
Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$.

Siga T el punt de tangència de la circumferència i la recta PC tangent a les dues circumferències de radi

$\overline{OT} = \overline{OM} = \frac{1}{4}c$.

$\overline{CT} = \overline{CM} = \frac{1}{2}c$.

Siga $x = \overline{PT}$, $y = \overline{OP}$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PMC}$, $\overset{\Delta}{PTO}$ són semblants i de raó 2:1.

Aplicant el teorema de Tales:

$x = \frac{\overline{PM}}{2} = \frac{c}{8} + \frac{y}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PTO}$:

$y^2 = x^2 + \left(\frac{c}{4}\right)^2$. $y^2 = \frac{c^2}{64} + \frac{y^2}{4} + \frac{1}{8}cy + \frac{c^2}{16}$. Resolent l'equació:

$y = \frac{5}{12}c$.

$\overline{PM} = \frac{1}{4}c + \frac{5}{12}c = \frac{2}{3}c$.

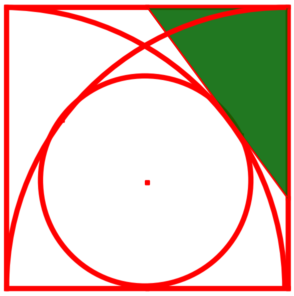
$$\frac{\overline{CM}}{\overline{PM}} = \frac{\frac{1}{2}c}{\frac{2}{3}c} = \frac{3}{4}.$$

Els catets del triangle $\overset{\Delta}{PMC}$ estan en proporció $\overline{CM} : \overline{PM} = 3:4$.

Aleshores, els costats del triangle $\overset{\Delta}{PMC}$ estan en proporció $\overline{CM} : \overline{PM} : \overline{PC} = 3:4:5$.

Problema 5

El triangle ombrejat té els costats en proporció $3:4:5$.



Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB}=c$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$.

$\overline{CM}=\frac{1}{2}c$.

Siga T la intersecció de l'arc i de la circumferència.

Sea $\overline{MT}=\overline{DM}=\frac{1}{2}c$.

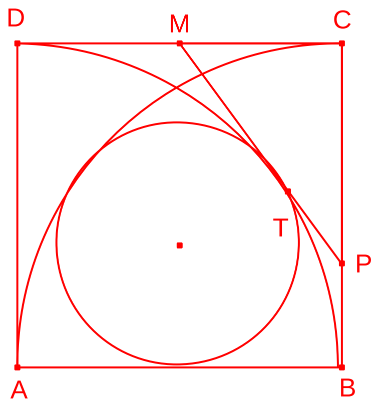
La recta MT talla el costat $\overline{BC}$ en el punt P.

Siga $\overline{CP}=x$.

$\overline{BP}=c-x$.

$\overline{PT}=\overline{BP}=c-r$.

$\overline{MP}=\frac{3}{2}c-x$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MCP}$:

$\left(\frac{3}{2}c-x\right)^2=x^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2$. Simplificant:

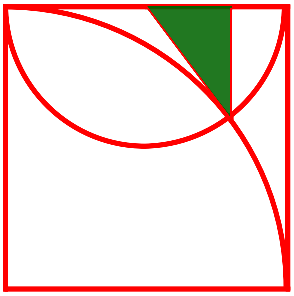
$x=\frac{2}{3}c$.

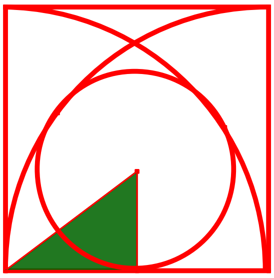
$$\frac{\overline{CM}}{\overline{CP}}=\frac{\frac{1}{2}c}{\frac{2}{3}c}=\frac{3}{4}.$$

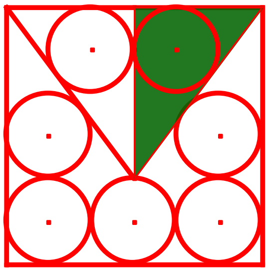
Aleshores, els costats del triangle $\overset{\Delta}{MCP}$ estan en proporció $\overline{CM}:\overline{CP}:\overline{PM}=3:4:5$.

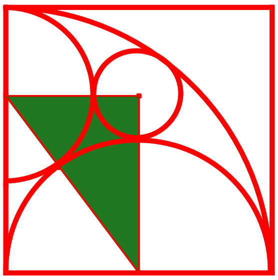
5 problemes més

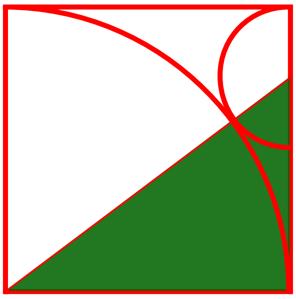
Els triangles ombrejats de les següents figures tenen els costats en proporció $3:4:5$.











Bibliografía:

YIU, PAUL. Recreational Mathematics. 2003.

REDÓN GÓMEZ, A. Geometría paso a paso. Volumen 1. Ed. Tébar. 2000.