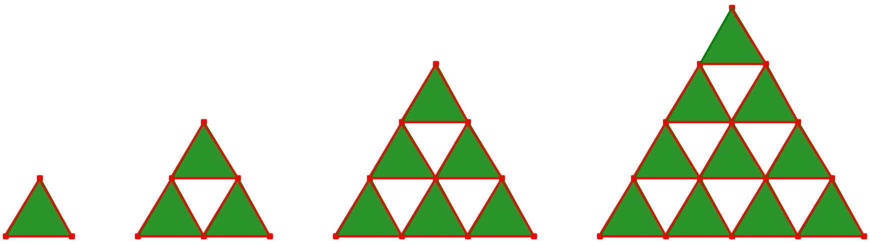
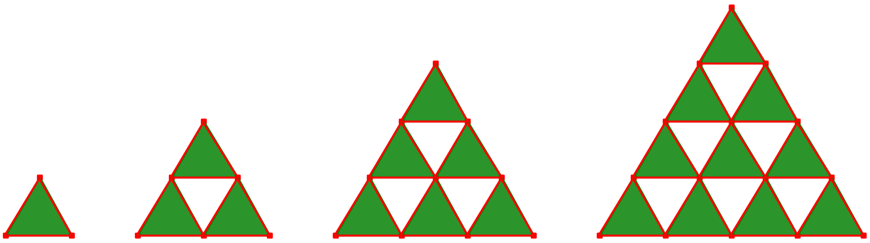
Suma de triangles equilàters.



La sèrie de diagrama està formada per triangles equilàter ombrejats.
a) Quants triangles ombrejats en total s'utilitzen en els 5 primers termes de la série.
b) Quants triangles ombrejats en total s'utilitzen en els 15 primers termes de la série.
c) Quants triangles ombrejats en total s'utilitzen en els n termes de la série.

Solució 1:

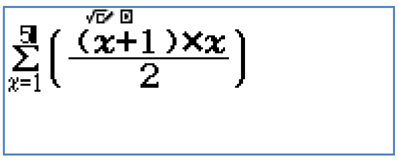


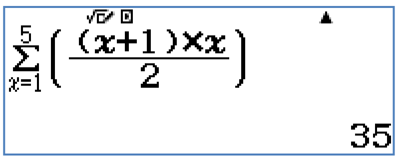
1 3 6 10

Els termes de la série són els nombres triangulars. El seu terme general és:

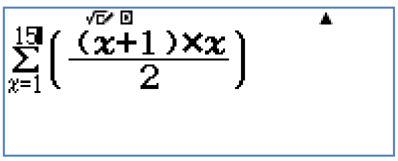
$$S_n = \frac{(n+1)n}{2}.$$

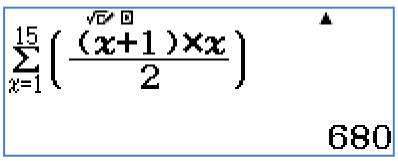
Utilitzarem la funció de sumatoris de la calculadora Casio 991 classwiz, per calcular el total dels 5 primers termes de la série:





En els 5 primers termes hi ha un total de 35 triangles ombrejats.
Calculem el total dels 15 primers termes de la série:





Solució 2:
Generalitzarem el terme general de les sumes:
La série de les sumes és:
1, 4, 10, 20, 35, 56,….
La série de les primers diferències és:
3, 6, 10, 15, 21,…..
La série de les segones diferències és:
3, 4, 5, 6,……
La série de les terceres diferències és constant:
1, 1, 1, 1,……
La successió de les sumes és una successió aritmètica de tercer ordre.
El terme general és un polinomi de tercer grau.

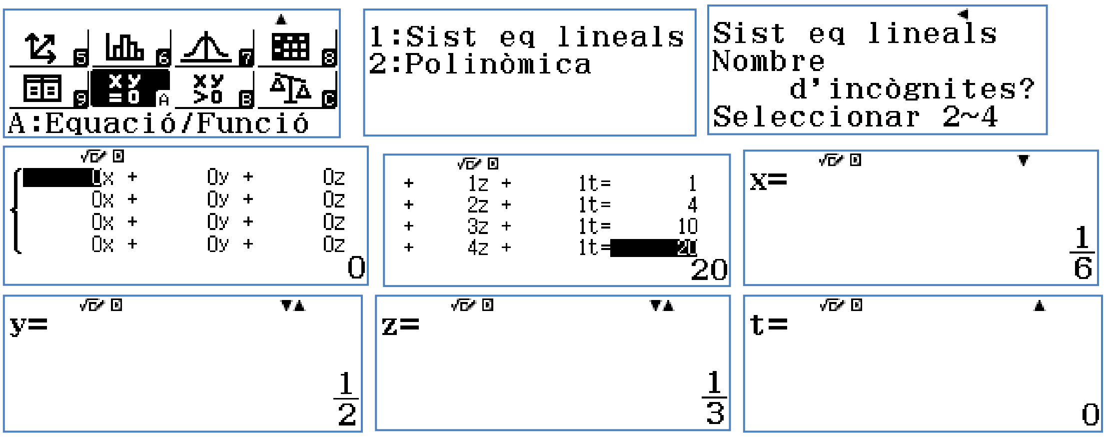
$T_n = a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d$.

La taula dels primers 4 primers termes és:

n	T_n
1	1
2	4
3	10
4	20

Utilitzarem la resolució de sistemes de 4 incògnites per determinar els coeficients del polinomi de tercer grau:

$$\begin{cases} a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 1 \\ a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 4 \\ a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d = 10 \\ a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + d = 20 \end{cases}.$$



La solució del sistema és:

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{6} \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{1}{3} \\ d = 0 \end{cases}$$

. El terme general és $T_n = \dfrac{1}{6} \cdot n^3 + \dfrac{1}{2} \cdot n^2 + \dfrac{1}{3} \cdot n = \dfrac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$.