8 problemes d'optimització

Problema 1

De tots els ortoedres d'àrea de la base 1cm^2 i la suma de la longitud de totes les arestes 20cm, determineu el de major àrea.
Potapov. Pàgina 352, problema 36.

Problema 2

Demostreu que de totes les piràmides quadrangulars regulars en què la suma de l'altura i l'aresta de la base és constant, el volum màxim la té la piràmide en què la cara lateral i la base formen 45º.
Gúsiev 920.

Problema 3

La suma dels quadrats de totes les arestes d'una piràmide triangular regular és P. Determineu l'àrea màxima d'una cara lateral.
Gúsiev 922.

Problema 4

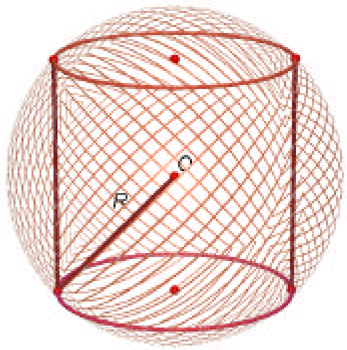
La base de la piràmide MABCD és el quadrat ABCD.
$\overline{MB}$ és altura de la piràmide.
Determineu el valor mínim de la longitud de l'aresta $\overline{MD}$ si el volum de la piràmide és igual a 9cm^2.
Gúsiev, 923.

Problema 5

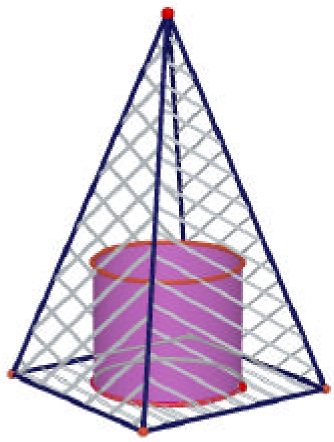
En un con de generatriu constant s'ha inscrit un prisma hexagonal regular, les arestes del qual totes són iguals. Determineu l'angle entre la generatriu i la base del con a fi que l'àrea de la superfície lateral del prisma siga màxima.

Problema 6

En una esfera de radi 6cm s'ha inscrit un cilindre de volum màxim.
Determineu la proporció entre el volum del cilindre i l'esfera.



Problema 7
Una piràmide quadrangular regular l'aresta de la base és a i l'altura h.
En la piràmide s'ha inscrit un cilindre tal que la base superior és tangent a totes les cares i la base inferior pertany a la base de la piràmide.
Determineu les mesures del cilindre de major volum.
Determineu el major volum.
Gúsiev 944.

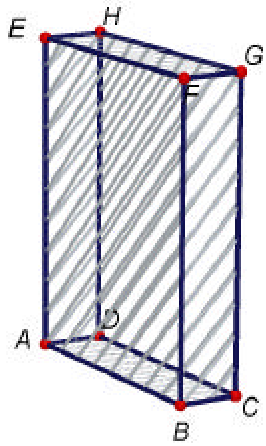


Problema 8
Un trapezi isòsceles té les diagonals perpendiculars.
Calculeu els valors de la proporció del perímetre i la paral·lela mitjana del trapezi.

Problema 1

De tots els ortoedres d'àrea de la base 1cm^2 i la suma de la longitud de totes les arestes 20cm, determineu el de major àrea.
Potapov. Pàgina 352, problema 36.

Solució:
Siga l'ortoedre ABCDEFGH de base el rectangle ABCD i àrea 1.
Siga $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{AE} = c$.



L'àrea de la base és:
$ab = 1$.
La suma de la longitud de totes les arestes és:
$4a + 4b + 4c = 20$ (1)
La funció a optimitzar és l'àrea de l'ortoedre:
$S(a,b,c) = 2(ab + bc + ac)$.
$S(a,b,c) = 2(1 + c(a+b))$.
De l'expressió (1):
$a + b = 5 - c$ (2)
La funció es transformaria en:
$S(c) = 2(1 + c(5-c))$.
$S(c) = 2(-c^2 + 5c + 1)$.
$S(c) = -2\left(c - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{29}{2}$.
$S(c) = -2\left(c - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{29}{2} \le \frac{29}{2}$.
La igualtat s'assoleix quan $c = \frac{5}{2}$.
En aquest cas $\begin{cases} ab = 1 \\ a + b = 5 - \frac{5}{2} \end{cases}$. La solució del sistema és $\begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$ o $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases}$ que dóna el mateix rectangle de la base.

Solució:
L'ortoedre d'àrea màxima s'assoleix quan les arestes de la base són 2cm, $\frac{1}{2}\text{cm}$ i l'altura $\frac{5}{2}\text{cm}$, l'àrea màxima és $\frac{29}{2}\text{cm}^2$.

Problema 2

Demostreu que de totes les piràmides quadrangulars regulars en què la suma de l'altura i l'aresta de la base és constant, el volum màxim la té la piràmide en què la cara lateral i la base formen 45º.

Gúsiev 920.

Solució:

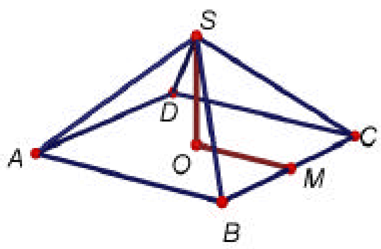
Siga la piramide quadrangular regular ABCDS de base quadrada ABCD.

Siga O el centre de la base.

Siga $a=\overline{AB}$ aresta de la base, $h=\overline{OS}$ altura.

Per hipòtesi $a+h=k$, k constant.

El volum de la piràmide és:



$V(a,h)=\frac{1}{3}a^2h$.

$h=k-a$.

$V(a)=\frac{1}{3}a^2(k-a)$, $a>0$.

Calculem la seua derivada:

$V'(a)=-a^2+\frac{2k}{3}a$.

$V'(a)=0$, $-a^2+\frac{2k}{3}a=0$. Resolent l'equació:

$a=\frac{2k}{3}$.

$V''(a)=-2a+\frac{2k}{3}$.

$V''\left(\frac{2k}{3}\right)=-\frac{2k}{3}<0$, aleshores, el màxim del volum s'assoleix quan $a=\frac{2k}{3}$.

Vegem que l'angle que forma la cara lateral i la base formen 45º quan $a=\frac{2k}{3}$.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.

L'angle que forma cara lateral i l'aresta és $\alpha=\angle OMS$

Si $a=\frac{2k}{3}$, $h=k-a=k-\frac{2k}{3}=\frac{k}{3}$. $\overline{OM}=\frac{1}{2}a=\frac{k}{3}$.

$\text{tg}\alpha=\frac{h}{\overline{OM}}=1$. Aleshores, $\alpha=45^{o}$.

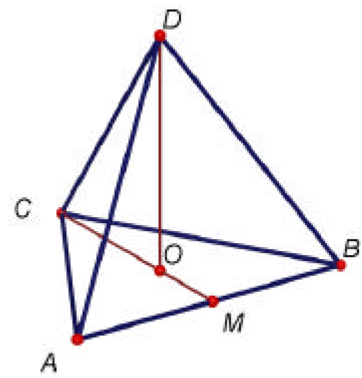
Problema 3
La suma dels quadrats de totes les arestes d'una piràmide triangular regular és P. Determineu l'àrea màxima d'una cara lateral.
Gúsiev 922.

Solució:

Siga ABCD la piràmide triangular de base $\overset{\Delta}{ABC}$ triangle equilàter.
Siga $\overline{AB}=a$ aresta de la base. Siga $\overline{AD}=b$ aresta lateral.
Per hipòtesi $3(a^2+b^2)=P$.

Siga O el baricentre de la base $\overset{\Delta}{ABC}$. Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:



$\overline{CM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Aplicant la propietat del baricentre:

$\overline{CO}=\frac{2}{3}\overline{CM}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$, $\overline{OM}=\frac{1}{3}\overline{CM}=\frac{\sqrt{3}}{6}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{COD}$:

$\overline{OD}^2=b^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DOM}$:

$\overline{DM}^2=\overline{OD}^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2$. $\overline{SM}^2=b^2-\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{12}a^2$.

$\overline{DM}^2=b^2-\frac{1}{4}a^2$.

L'àrea de la cara lateral $\overset{\Delta}{ABD}$ és:

$S(a,b)=\frac{1}{2}a\sqrt{b^2-\frac{1}{4}a^2}$. $b^2=\frac{P}{3}-a^2$. $S(a)=\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{P}{3}-a^2-\frac{1}{4}a^2}$.

$S(a)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{3}a^2-\frac{5}{4}a^4}$, $a>0$.

L'àrea màxima s'assoleix en el màxim de la funció $f(a)=\frac{P}{3}a^2-\frac{5}{4}a^4$.

Derivem la funció f(a):

$f'(a)=\frac{2P}{3}a-5a^3$.

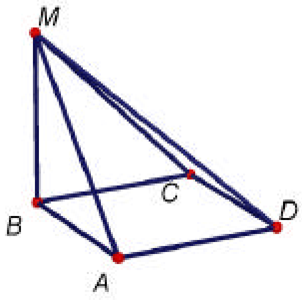
$f'(a)=0$, $\frac{2P}{3}a-5a^3=0$. Resolent l'equació: $a=\sqrt{\frac{2P}{15}}$.

$f''(a)=\frac{2P}{3}-15a^2$. $f''\left(\sqrt{\frac{2P}{15}}\right)=\frac{2P}{3}-15\frac{2P}{5}=-\frac{14P}{3}<0$.

Aleshores, el màxim s'assoleix quan $a=\sqrt{\frac{2P}{15}}$.

L'àrea màxima és: $S\left(\sqrt{\frac{2P}{15}}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{3}\left(\sqrt{\frac{2P}{15}}\right)^2-\frac{5}{4}\left(\sqrt{\frac{2P}{15}}\right)^4}=\frac{P\sqrt{5}}{30}$.

Problema 4
La base de la piràmide MABCD és el quadrat ABCD.
$\overline{MB}$ és altura de la piràmide.
Determineu el valor mínim de la longitud de l'aresta $\overline{MD}$ si el volum de la piràmide és igual a $9cm^2$.
Gúsiev, 923.

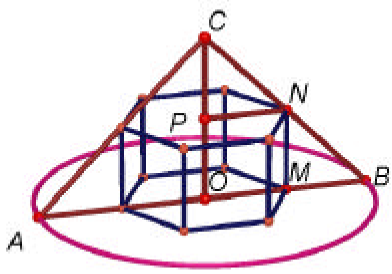


Solució 1:
Siga $\overline{AB}=a$, aresta de la base i $\overline{MB}=h$, altura.
El volum de la piràmide MABCD és: $\frac{1}{3}a^2h=9$.
$a^2h=27$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $B\overset{\Delta}{A}D$:
$\overline{BD}=a\sqrt{2}$.
Aplicant el teorema de Pitagores al triangle rectangle $B\overset{\Delta}{D}M$:
$\overline{MD}^2=\overline{MB}^2+\overline{BD}^2$.
$\overline{MD}^2=h^2+2a^2$.
Aplicant la desigualtat entre la mitjana aritmètica i geomètrica de a^2, a^2, h^2:
$\overline{MD}^2=h^2+2a^2\geq 3\sqrt[3]{a^2\cdot a^2\cdot h^2}=3\sqrt[3]{(ha^2)^2}=3\sqrt[3]{27^2}=27$
La igualtat s'assoleix quan $a^2=a^2=h^2$ és a dir quan $a=h$.
En aquest cas $a^2a=27$, $a=h=3$.
El mínim de la longitud de $\overline{MD}$ s'assoleix quan $a=h=3$ i la longitud mínima és:
$\overline{MD}_{mín}=\sqrt{3^2+2\cdot 3^2}=3\sqrt{3}$.

Solució 2:
Siga $\overline{AB}=a$, aresta de la base i $\overline{MB}=h$, altura.
El volum de la piràmide MABCD és: $\frac{1}{3}a^2h=9$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $B\overset{\Delta}{A}D$: $\overline{BD}=a\sqrt{2}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $B\overset{\Delta}{D}M$: $\overline{MD}^2=\overline{MB}^2+\overline{BD}^2$.
$\overline{MD}^2=h^2+2a^2$.
La funció longitud de $\overline{MD}$ és: $L(a,h)=\sqrt{2a^2+h^2}$. $a^2=\frac{27}{h}$.
$L(h)=\sqrt{\frac{54}{2}+h^2}$, el màxim de la funció L(a) s'assoleix en el màxim de la funció
$f(h)=\frac{54}{h}+h^2$, $h>0$. Derivem la funció:
$f'(h)=-\frac{54}{h^2}+2h$. $f'(h)=0$, $-\frac{54}{h^2}+2h=0$. Resolent l'equació: $h=3$.
$f''(h)=\frac{108}{h^2}+2$. $f''(3)=\frac{108}{9}+2=14>0$.
Aleshores el mínim s'assoleix quan $h=3$, $a=3$ i la longitud mínima del segment és:
$\overline{MD}_{mín}=\sqrt{3^2+2\cdot 3^2}=3\sqrt{3}$.

Problema 5
En un con de generatriu constant s'ha inscrit un prisma hexagonal regular, les arestes del qual totes són iguals. Determineu l'angle entre la generatriu i la base del con a fi que l'àrea de la superfície lateral del prisma siga màxima.

Solució:
Siga el con de diàmetre $\overline{AB} = r$ i generatriu constant $\overline{BC} = g$.
Siga $\alpha = \angle ABC$.
Siga $\overline{MN} = \overline{PN} = a$, aresta i radi de l'hexàgon.
La funció que volem maximitzar és la superfície lateral del prisma.
$S(a) = 6a^2$.
Aleshores l'àrea serà màxima quan l'aresta del prisma siga màxima.
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BOC}$
$\overline{OC} = g \cdot \sin\alpha$.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{NPC}$
$\overline{PC} = a \cdot \mathrm{tg}\alpha$.
$\overline{PC} = \overline{OC} - \overline{MN} = g \cdot \sin\alpha - a$.
$a \cdot \mathrm{tg}\alpha = g \cdot \sin\alpha - a$.
$a(\alpha) = g\dfrac{\sin\alpha}{1+\mathrm{tg}\alpha}$, $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, funció a optimitzar.
Derivem la funció:

$$a'(\alpha) = g\frac{\cos\alpha(1+\mathrm{tg}\alpha) - \sin\alpha\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}{(1+\mathrm{tg}\alpha)^2}.$$

$a'(\alpha) = 0$, $\cos\alpha(1+\mathrm{tg}\alpha) - \dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{\cos\alpha} = 0$.

$\cos^2\alpha(1+\mathrm{tg}\alpha) - \mathrm{tg}\alpha = 0$.

$\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}(1+\mathrm{tg}\alpha) - \mathrm{tg}\alpha = 0$.

$1 - \mathrm{tg}^3\alpha = 0$.

$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

$a''\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \le 0$.

Aleshores, el màxim de l'àrea lateral del prisma s'assoleix quan $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

En aquest cas les arestes del prisma mesuren, $a\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = g\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+1} = \dfrac{g\sqrt{2}}{4}$.

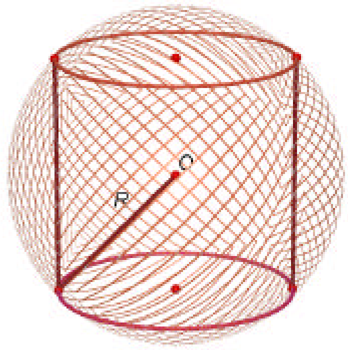
L'àrea lateral màxima és:

$$S_{\text{màx}} = 6\left(\frac{g\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{3}{4}g^2.$$

Problema 6

En una esfera de radi 6cm s'ha inscrit un cilindre de volum màxim.

Determineu la proporció entre el volum del cilindre i l'esfera.



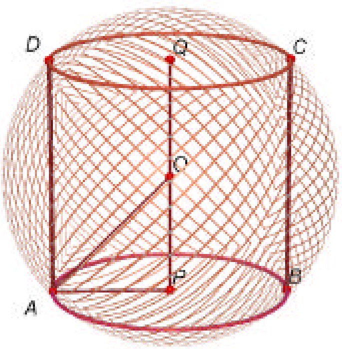
Solució:

Resoldrem el problema per a una esfera de radi R.

Siga el cilindre de radi $\overline{PA} = r$ i altura $\overline{PQ} = h$ inscrit en una esfera de centre O i radi $\overline{OA} = R$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APO}$:

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2.$$



El volum del cilindre és: $V(r,h) = \pi r^2 h$, $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$.

$V(h) = \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h$, $h \in \left]0, 2R\right[$. Funció volum del cilindre a optimtzar. Derivem la funció:

$$V'(h) = \pi\left(R^2 - \frac{3}{4}h^2\right)$$

$V'(h) = 0$, $R^2 - \frac{3}{4}h^2 = 0$. Resolent l'equació: $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$.

$$V''(h) = \pi\left(-\frac{3}{2}h\right),\quad V''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -\pi\sqrt{3} < 0.$$

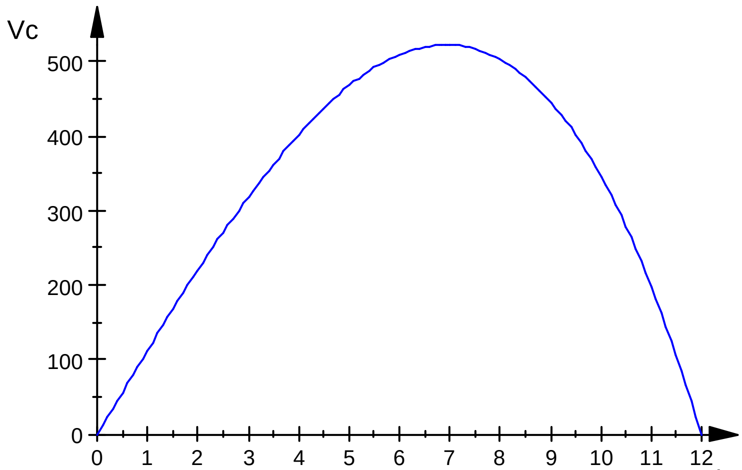
Aleshores $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$ és un màxim relatiu estricte.

El volum màxim del cilindre s'assoleix quan $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$, $r = \frac{\sqrt{3}}{3}R$ i el volum màxim és:

$$V_{màx} = \pi\left(\frac{\sqrt{6}}{3}R\right)^2 \frac{2\sqrt{3}}{3}R = \pi\frac{4\sqrt{3}}{9}R^3.$$

La proporció entre els volums del cilindre de volum màxim i l'esfera és:

$$\frac{V_{màx}}{V_{esf}} = \frac{\pi\frac{4\sqrt{3}}{9}R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



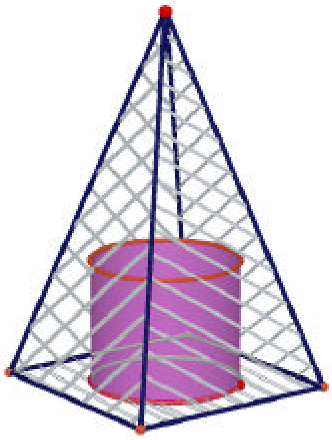
$S_c = \pi\left(36h - \frac{h^3}{4}\right)$

$h_{màx} \approx 6.93\text{cm}$

$V_{màx} \approx 522.37\text{cm}^3$

Problema 7

Una piràmide quadrangular regular l'aresta de la base és a i l'altura h.
En la piràmide s'ha inscrit un cilindre tal que la base superior és tangent a totes les cares i la base inferior pertany a la base de la piràmide.
Determineu les mesures del cilindre de major volum.
Determineu el major volum.
Gúsiev 944.



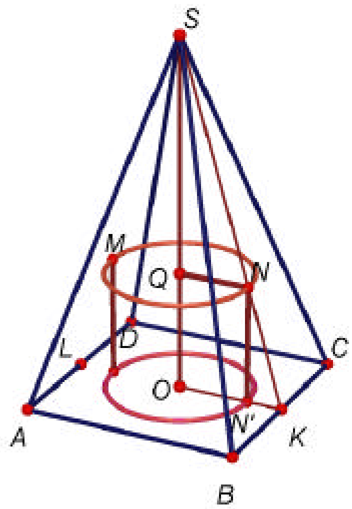
Solució:
Siga la piràmide ABCDS, de base el quadrat ABCD de costat $\overline{AB}=a$ i altura $\overline{OS}=h$, on O és el centre de la base.

Siga el cilindre de diàmetre de la base $\overline{MN}=2r$ i centre Q, i altura, $\overline{OQ}=x$.
Siga N' la projecció de N sobre la base ABCD.
Siga K el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$

$\overline{N'K}=\frac{a}{2}-r$, $\overline{QN}=r$. $\overline{OK}=\frac{a}{2}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{SOK}$, $\overset{\Delta}{NN'K}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{x}{\frac{a}{2}-r}=\frac{h}{\frac{a}{2}}$. $x=\frac{2h}{a}\left(\frac{a}{2}-r\right)$.



El volum del cilindre és:

$V(r,x)=\pi r^2 x$.

$V(r)=\frac{2\pi h}{a}\left(\frac{a}{2}r^2-r^3\right)$, $r\in\left]0,\frac{a}{2}\right[$. Derivant la funció:

$V'(r)=\frac{2\pi h}{a}(ar-3r^2)$.

$V'(r)=0$, si $ar-3r^2=0$. Resolent l'equació: $r=\frac{1}{3}a$.

$V''(r)=\frac{2\pi h}{a}(a-6r)$. $V''\left(\frac{1}{3}a\right)=\frac{2\pi h}{a}\left(a-6\frac{1}{3}a\right)=-2\pi h<0$.

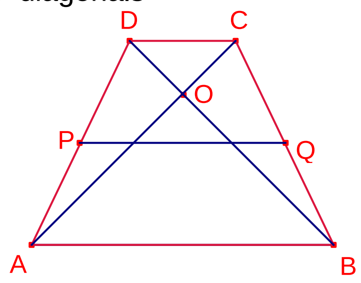
Aleshores, el màxim s'assoleix quan $r=\frac{1}{3}a$.

Si $r=\frac{1}{3}a$, aleshores, $x=\frac{1}{3}h$.

El volum màxim del cilindre és $V_{max}=\frac{\pi}{27}a^2h$.

Problema 8
Un trapezi isòsceles té les diagonals perpendiculars.
Calculeu els valors de la proporció del perímetre i la paral·lela mitjana del trapezi.

Solució:
Siga el trapezi ABCD amb $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ costats paral·lels i $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ diagonals perpendiculars.



Siga O la intersecció de les diagonals.
$\overline{AO} = \overline{BO}$, $\angle OAB = \angle OBA = 45^o$
Siga $\alpha = \angle DAC$, $0^o \leq \alpha \leq 90^o$.
Siga $\overline{PQ}$ la paral·lela mitjana del trapezi:

$$\overline{PQ} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} .$$

Siga $\overline{AB} = a$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{AOB}$:

$$\overline{AO} = \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOD}$:

$$\overline{AD} = \overline{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2\cos\alpha} a , \quad \overline{OD} = \overline{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathrm{tg}\alpha \cdot a .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{COD}$: $\overline{CD} = a \cdot \mathrm{tg}\alpha$.
El perímetre del trapezi és:

$$p = \overline{AB} + \overline{CD} + 2 \cdot \overline{AD} = \left(1 + \mathrm{tg}\alpha + \frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}\right) a .$$

La paral·lela mitjana del trapezi és:

$$\overline{PQ} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} = \left(\frac{1 + \mathrm{tg}\alpha}{2}\right) a .$$

La proporció del perímetre i la paral·lela mitjana és:

$$\frac{p}{\overline{\overline{PQ}}} = \frac{\left(1 + \mathrm{tg}\alpha + \frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}\right) a}{\left(\frac{1+\mathrm{tg}\alpha}{2}\right) a} = 2 \frac{1 + \mathrm{tg}\alpha + \frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}}{1 + \mathrm{tg}\alpha} =$$

$$= 2\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha(1 + \mathrm{tg}\alpha)}\right) =$$

$$= 2\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sin\alpha + \cos\alpha}\right) =$$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{\sin(45^o + \alpha)}\right), \quad 45^o \leq \alpha \leq 90^o .$$

El mínim s'assoleix quan $\alpha = 45^o$, $\frac{p}{\overline{\overline{PQ}}}_{\text{mínim}} = 2\left(1 + \frac{1}{1}\right) = 4$.

El màxim s'assoleix quan $\alpha = 0^o, 90^o$, $\frac{p}{\overline{\overline{PQ}}}_{\text{màxim}} = 2\left(1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = 2 + 2\sqrt{2} \approx 4'8284$.