Problema 6

Donats els punts $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(-5,-4,4)$. Calculeu:

a) El volum del tetraedre ABCD.
b) L'àrea total del tetraedre.
c) L'altura sobre la cara $\overset{\Delta}{ABC}$.

Solució:

Calculem les components dels vectors $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$

$\vec{AB} = (2,-2,-3), \vec{AC} = (4,0,6), \vec{AD} = (-7,-7,3)$.

a)
El volum del tetraedre és:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 3 \end{matrix} \right\| = 46u^3.$$

b)
Calcularem l'àrea de les quatre cares del tetraedre.

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (-12,-24,8).$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|(-12,-24,8)\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = 14u^2.$$

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -3 \\ -7 & -7 & 3 \end{vmatrix} = (-27,15,-28).$$

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right\| = \frac{1}{2}\left\|(-27,15,-28)\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-27)^2 + 15^2 + (-28)^2} = \frac{\sqrt{1738}}{2}u^2 \approx 20.84u^2$$

$$\vec{AC} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 3 \end{vmatrix} = (42,-54,-28).$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right\| = \frac{1}{2}\left\|(42,-54,-28)\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{42^2 + (-54)^2 + (-28)^2} = \sqrt{1366}u^2 \approx 36.96u^2$$

$$\vec{BC} \times \vec{BD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 9 \\ -9 & -5 & 6 \end{vmatrix} = (57,-93,8).$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}\right\| = \frac{1}{2}\left\|(57,-93,8)\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{57^2 + (-93)^2 + 8^2} = \frac{\sqrt{11962}}{2}u^2 \approx 54.69u^2.$$

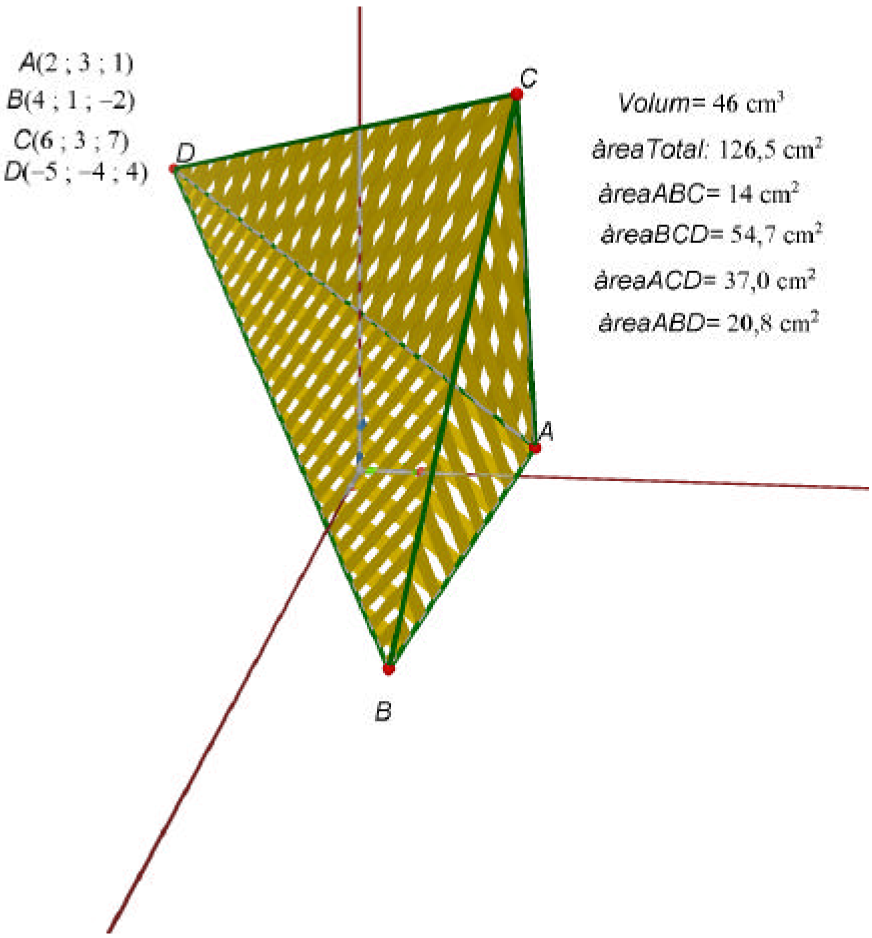
L'àrea total del tetraedre és:

$$S_{ABCD} = 14 + \frac{\sqrt{1738}}{2} + \sqrt{1366} + \frac{\sqrt{11962}}{2} \approx 126.49u^2.$$

c)
El volum del tetraedre és

$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot h = 46u^3$, on h és l'altura sobre la cara $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\frac{1}{3}14 \cdot h = 46$. $h = \frac{69}{7}u = 9.86u$.



A(2 ; 3 ; 1)
B(4 ; 1 ; −2)
C(6 ; 3 ; 7)
D(−5 ; −4 ; 4)
Volum= 46 cm³
àreaTotal: 126,5 cm²
àreaABC= 14 cm²
àreaBCD= 54,7 cm²
àreaACD= 37,0 cm²
àreaABD= 20,8 cm²
C
D
A
B