Problema 7

Determineu el punt Q simètric del punt $P(2,-5,7)$ respecte de la recta que passa pels punts $A(5,4,6)$, $B(-1,-7,4)$.

Solució:

Determinem les components del vector $\vec{AB}$:

$\vec{AB}=(-6,-11,-2)$.

L'equació de la recta que passa pels punts A, B és:

$r\equiv(x,y,z)=(5,4,6)+\alpha(6,11,2)$.

Determinem el punt projecció P_0 de P sobre la recta r:

$P_0(5+6\alpha,4+11\alpha,6+2\alpha)$.

Calculem les components del vector $\vec{PP_0}$:

$\vec{PP_0}=(3+6\alpha,9+11\alpha,-1+2\alpha)$.

Els vectors $\vec{PP_0}$, $\vec{AB}$ són ortogonals. El seu producte escalar és zero:

$(3+6\alpha,9+11\alpha,-1+2\alpha)(-6,-11,-2)=0$.

$-161\alpha-115=0$. Resolent l'equació:

$\alpha=\dfrac{-5}{7}$.

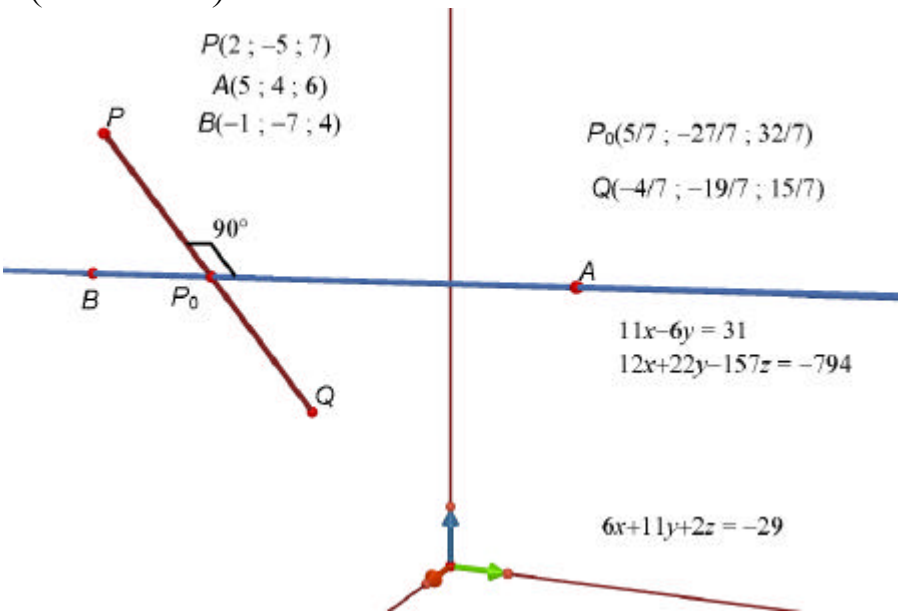
El punt projecció P_0 té coordenades:

$$P_0\left(5+6\left(\frac{-5}{7}\right)4+11\left(\frac{-5}{7}\right),6+2\left(\frac{-5}{7}\right)\right)$$

$$P_0\left(\frac{5}{7},\frac{-27}{7},\frac{32}{7}\right).$$

El punt simètric $Q(x,y,z)$ de P respecte de P_0 compleix:

$\vec{PQ}=2\vec{PP_0}$.

$$(x-2,y+5,z-7)=2\left(\frac{-9}{7},\frac{8}{7},\frac{-17}{7}\right).$$

$$Q\left(\frac{-4}{7},\frac{-19}{7},\frac{15}{7}\right).$$