

Taller: Problemes de geometria amb Cabri

Castelló, abril 2008

Ricard Peiró i Estruch

L'ensenyança de la geometria hauria de ser nucli central en el currículum escolar ja que ofereixen resultats interessants així com raonaments i metodologies formatives. La geometria es distingeix per la claredat i la senzillesa dels enunciats.

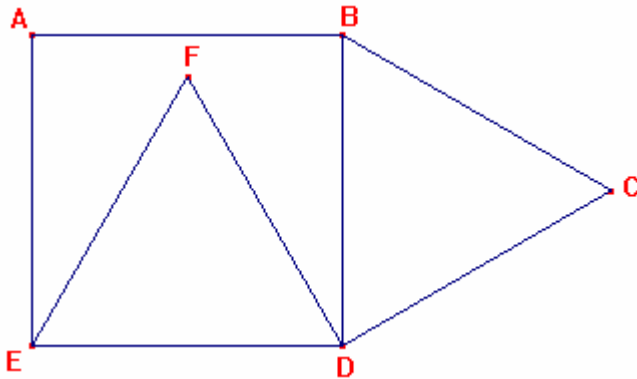
Resoldre problemes de geometria és una tasca que permet dibuixar el problema abans de començar la seua resolució i donar la intuïció del problema. L'ajut del programa de geometria dinàmica Cabri Géomètre ens permet provar la conjectura del problema. Aquests processos porten implícits procediments d'anàlisi, comprovació, experimentació, i investigació, procediments que motiven l'activitat constructiva de l'alumnat.

La introducció de materials informàtics en l'aula, comporta un gran canvi metodològic. Permet l'anàlisi dels resultats agilitant els processos de càlcul i ajuden a la visualització de situacions difícils d'abstraure a partir d'una expressió verbal o a la pissarra.

El taller consisteix en construir geomètricament i provar la conjectura del problema que es vol resoldre. Els problemes són de distinta complexitat i nivell.

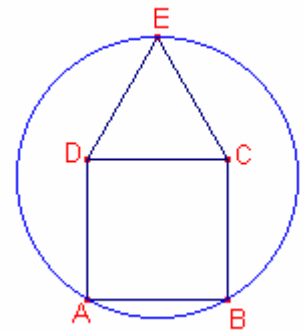
Problema 1. Un quadrat i dos triangles equilàters

ABDE és un quadrat; DEF i BCD són dos triangles equilàters.
Demostreu que els punts A, F i C són alineats.



Problema 2: Un quadrat, un triangle equilàter i un cercle.

Un triangle equilàter està dibuixat al defora del costat superior del quadrat ABCD de costat 1 com mostra la figura.
Si una circumferència passa pels punts A, B i E. Quin és el radi del cercle.



Problema 3: Resolució de triangles.

- a) Resoleu el triangle coneguts $a = 6, h_A = 9, h_B = 4$.
- b) Resoleu el triangle coneguts $a = 10, b = 15, h_A = 8$.

Problema 4: propietat de l'ortocentre

Siga el triangle acutangle $\triangle ABC$. Siguen \overline{AD} , \overline{BE} , \overline{CF} les altures del triangle. Siga H l'ortocentre. Demostreu que $\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF} = 2$.

Problema 5: Relació entre les altures i radi de la circumferència inscrita d'un triangle.

Considerem el triangle $\triangle ABC$, siga r el radi de la circumferència inscrita.
Siguen h_1, h_2, h_3 les 3 altures del triangle.

Aleshores, $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}$.

Problema 6: Exercicis d'optimització.

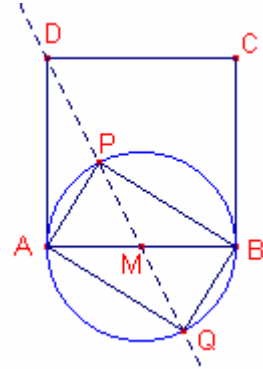
- a) De tots els rectangles de perímetre P determineu el que tinga mínima diagonal.
- b) Determineu el rectangle d'àrea màxima inscrit en un triangle isòsceles de base a i de costats iguals b .

Problema 7: Heptàgon regular.

Siga ABCDEFG un heptàgon regular. Proveu que $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$.

Problema 8: Dos quadrat en un cercle.

Un quadrat de costat a està inscrit en una circumferència. Determineu el costat del quadrat inscrit en un dels segments circulars obtinguts.
Shariguin 160.



Problema 9: nombre d'or 1.

Siga M el punt mig del costat \overline{AB} del quadrat $ABCD$.
La recta MD talla el cercle de diàmetre \overline{AB} en el punt P .

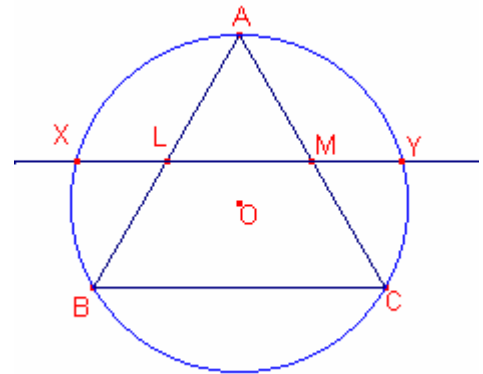
Proveu que $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Problema 10: nombre d'or 2.

Siga el triangle equilàter $\triangle ABC$.
Siguen L, M els punts migs dels segments AB, AC , respectivament.

Siga $C1$ la circumferència circumscrita al triangle $\triangle ABC$.
La recta que passa pels punts L, M talla la circumferència $C1$ en els punts X, Y .

Proveu que $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\overline{LY}}{\overline{LM}} = \frac{\overline{LM}}{\overline{MY}}$.



Problema 11: Oposicions de secundària 1.

Determineu l'envolupant de la família de rectes que formen amb els eixos coordenats triangles d'àrea constant S .
Oposicions de Castella la Manxa 2006.

Problema 12: Oposicions de secundària 2.

En un triangle rectangle $\triangle ABC$, $\angle A = 90^\circ$, siga \overline{AD} l'altura, siga \overline{BF} la bisectriu i E la intersecció de \overline{AD} , \overline{BF} . Proveu que:

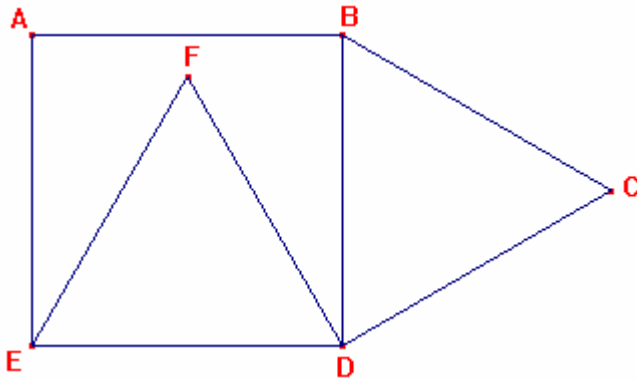
- El triangle $\triangle AEF$ és isòsceles.
- $\overline{DC} > 2 \cdot \overline{EF}$.

Oposicions València 2005.

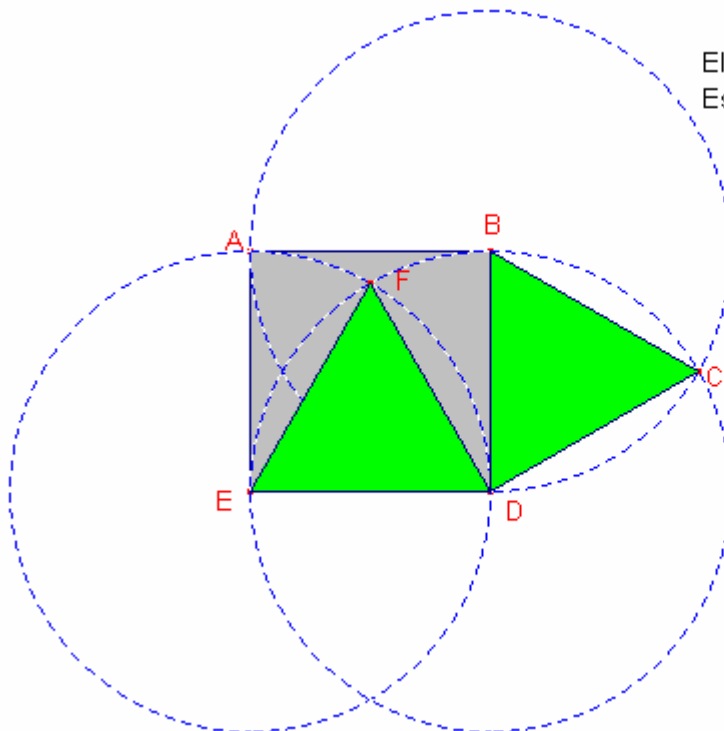
Construccions amb Cabri

Problema 1. Un quadrat i dos triangles equilàters

ABDE és un quadrat; DEF i BCD són dos triangles equilàters.
Demostreu que els punts A, F i C són alineats.



- Dibuixeu el quadrat ABDE (opció polígon regular).
- Dibuixeu la circumferència C_1 de centre E que passa per D.
- Dibuixeu la circumferència C_2 de centre D que passa per E.
- Feu la intersecció de les circumferències C_1 i C_2 . Anomeneu el punt F.
- Dibuixeu el triangle DEF.
- Dibuixeu la circumferència C_3 de centre B que passa per D.
- Feu la intersecció de les circumferències C_2 , C_3 . Anomeneu el punt C.
- Dibuixeu el triangle BDC.
- Comproveu que els punts A, F i C estan alineats.

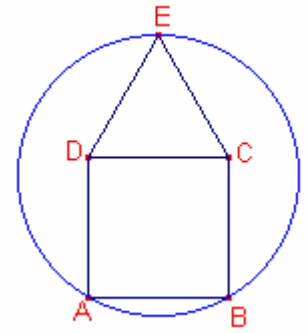


Els punts A, F i C estan alineats?
Estos puntos están alineados

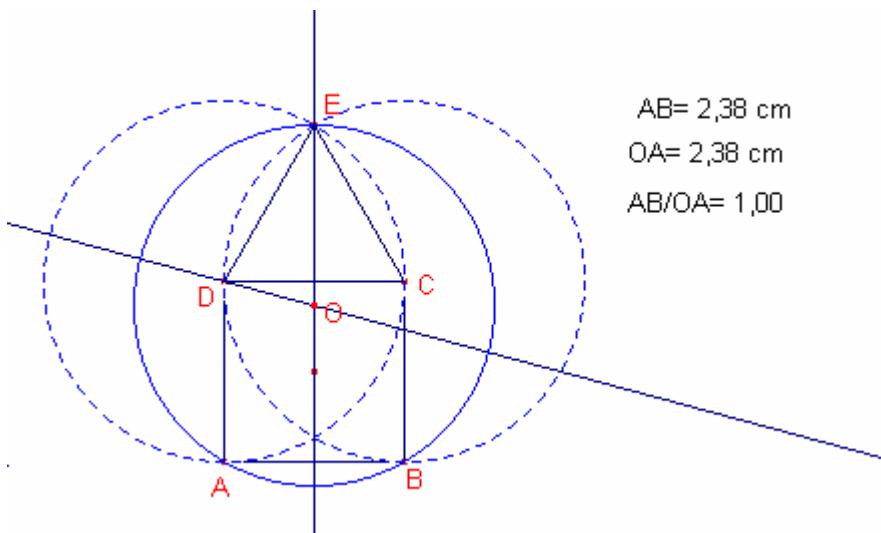
Problema 2: Un quadrat, un triangle equilàter i un cercle.

Un triangle equilàter està dibuixat al defora del costat superior del quadrat ABCD de costat 1 com mostra la figura.

Si una circumferència passa pels punts A, B i E. Quin és el radi del cercle.



- Dibuixeu el quadrat ABCD (opció polígon regular).
- Dibuixeu la circumferència C_1 de centre D que passa per C.
- Dibuixeu la circumferència C_2 de centre C que passa per D.
- Feu la intersecció de les circumferències C_1 i C_2 . Anomeneu el punt E.
- Dibuixeu el triangle $\triangle DCE$.
- Dibuixeu la mediatriu r del segment \overline{AB} .
- Dibuixeu la mediatriu s del segment \overline{AE} .
- Feu la intersecció de les rectes r, s. Anomeneu el punt O.
- dibuixeu la circumferència C_3 de centre O que passa pel punt A.
- Calculeu les mesures dels segments \overline{AB} , \overline{OA} .
- Dividiu les mesures dels costats anteriors, i noteu que és 1.

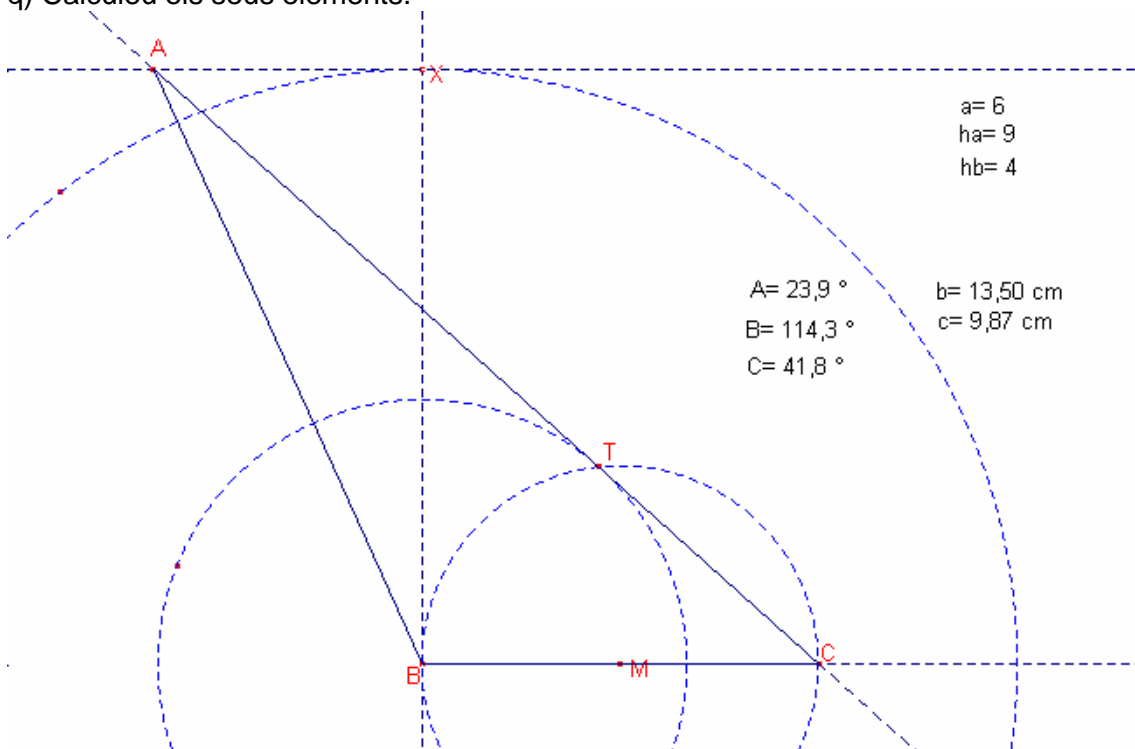


Problema 3: Resolució de triangles.

- a) Resoleu el triangle coneguts $a = 6, h_A = 9, h_B = 4$.
b) Resoleu el triangle coneguts $a = 10, b = 15, h_A = 8$.

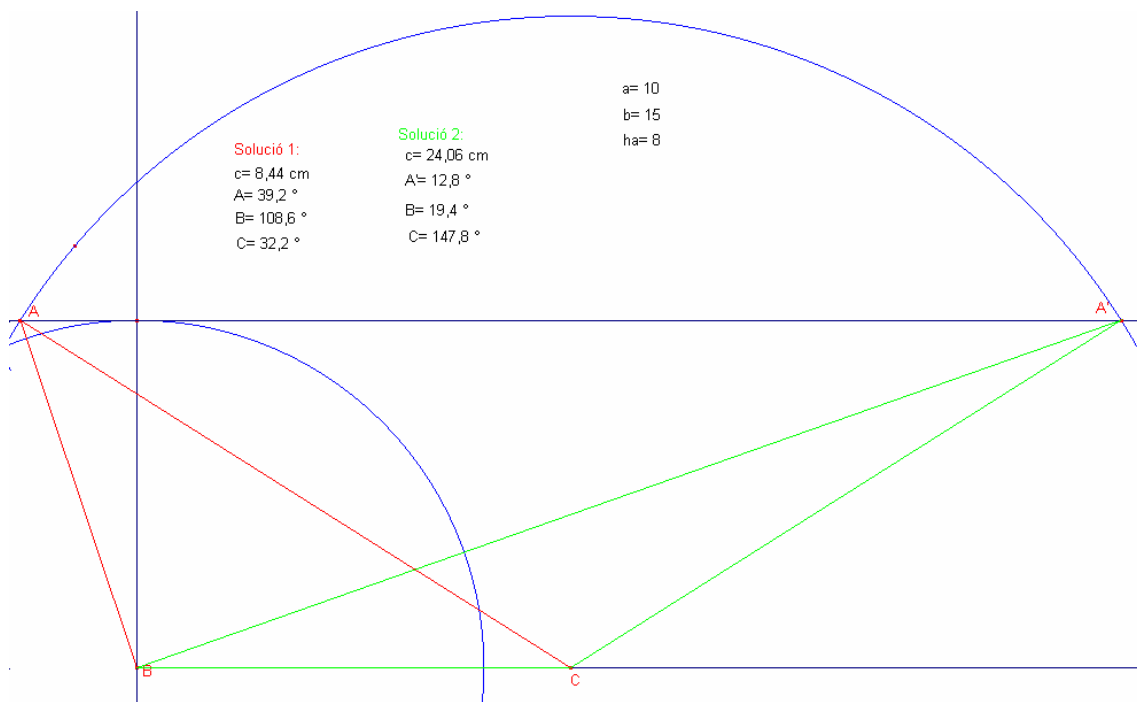
Apartat a

- a) Amb edició numèrica definiu $a = 6, h_A = 9, h_B = 4$
b) Dibuixeu la semirecta d'origen B.
c) Transferiu a la semirecta el valor a. Anomeneu el punt C.
d) Transferiu el valor h_A al punt B.
e) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre B i radi h_A .
f) Dibuixeu la recta perpendicular r a la semirecta que passa pel punt B.
g) Feu la intersecció de la circumferència C_1 i la recta r. Anomeneu el punt X.
h) Dibuixeu la recta s perpendicular a r que passa pel punt X.
i) Transferiu el valor h_B al punt B.
j) Dibuixeu la circumferència C_2 de centre B i radi h_B .
k) Dibuixeu el punt mig M del segment \overline{BC} .
l) Dibuixeu la circumferència C_3 de centre M que passa pel punt B.
m) Feu la intersecció de les circumferències C_2, C_3 . Anomeneu el punt T, peu de l'altura sobre el costat b.
n) Dibuixeu la recta t que passa pels punts C, T.
o) Feu la intersecció de les rectes s, t. Anomeneu el punt A.
p) Dibuixeu el triangle $\triangle ABC$.
q) Calculeu els seus elements.



Apartat b

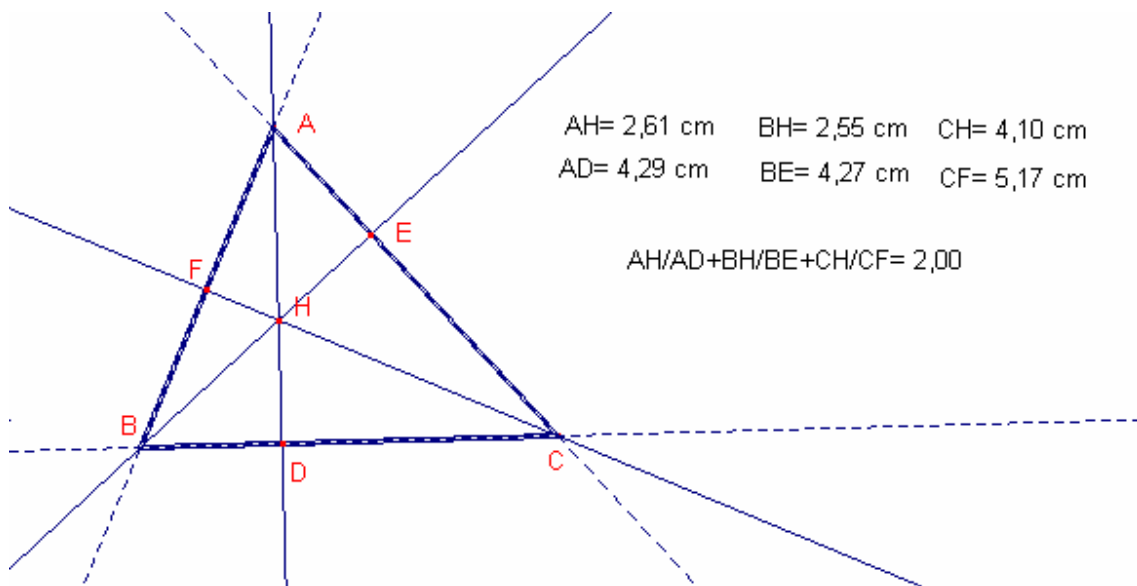
- Amb edició numèrica definiu $a = 10, b = 15, h_A = 8$
- Dibuixeu la semirecta d'origen B.
- Transferiu a la semirecta el valor a . Anomeneu el punt C.
- Transferiu el valor h_A al punt B.
- Dibuixeu la circumferència C_1 de centre B i radi h_A .
- Dibuixeu la recta perpendicular r a la semirecta que passa pel punt B.
- Feu la intersecció de la circumferència C_1 i la recta r . Anomeneu el punt X.
- Dibuixeu la recta s perpendicular a r que passa pel punt X.
- Transferiu el valor b al punt C.
- Dibuixeu la circumferència C_2 de centre C i radi b .
- Feu la intersecció de la recta s i la circumferència C_2 . Anomeneu els punts A, A'. El problema té dues solucions.
- Dibuixeu els triangles $\triangle ABC$, $\triangle A'BC$.
- Calculeu els seus elements.



Problema 4: propietat de l'ortocentre

Siga el triangle acutangle $\triangle ABC$. Siguen \overline{AD} , \overline{BE} , \overline{CF} les altures del triangle. Siga H l'ortocentre. Demostreu que $\frac{\overline{AH}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BH}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{CH}}{\overline{CF}} = 2$.

- Dibuixeu el triangle acutangle $\triangle ABC$.
- Dibuixeu les rectes BC, AC, AB.
- Dibuixeu la recta altura h_a perpendicular a la recta BC que passa per A.
- Feu la intersecció de les rectes BC, h_a . Anomeneu el punt D.
- Anàlogament dibuixeu les rectes altura h_b, h_c .
- Feu la intersecció de les rectes AC, h_b . Anomeneu el punt E.
- Feu la intersecció de les rectes AB, h_c . Anomeneu el punt F.
- Feu la intersecció de les rectes h_a, h_b . Anomeneu el punt H, ortocentre del triangle.
- Mesureu els segments: $\overline{AH}, \overline{AD}, \overline{BH}, \overline{BE}, \overline{CH}, \overline{CF}$.
- Amb ajut de la calculadora, calculeu $\frac{\overline{AH}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BH}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{CH}}{\overline{CF}}$.
- Noteu que el teorema només s'acompleix quan el triangle és acutangle.

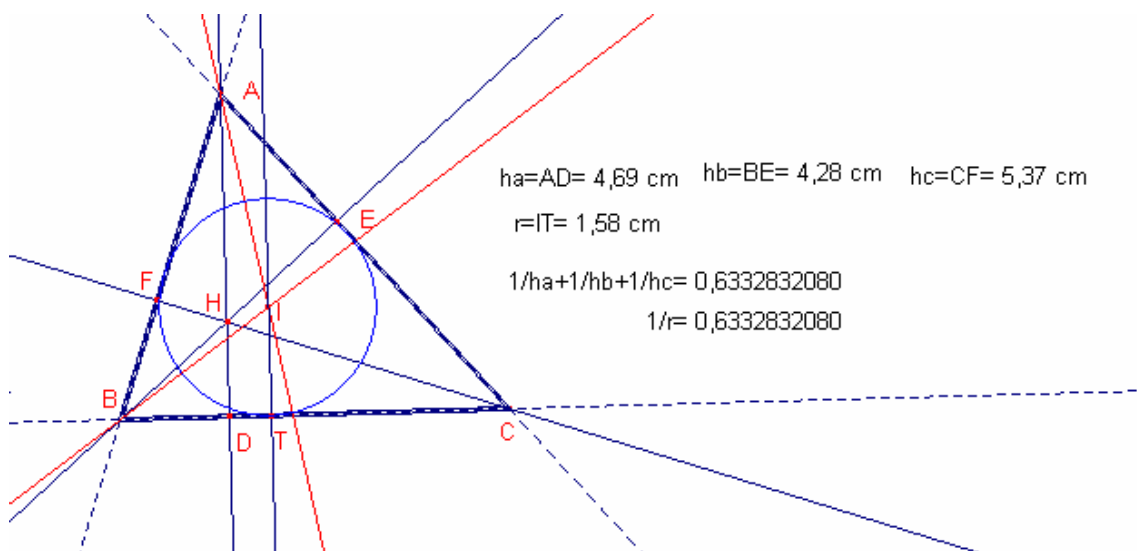


Problema 5: Relació entre les altures i radi de la circumferència inscrita d'un triangle.

Considerem el triangle $\triangle ABC$, siga r el radi de la circumferència inscrita.
Siguen h_1, h_2, h_3 les 3 altures del triangle.

Aleshores, $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}$.

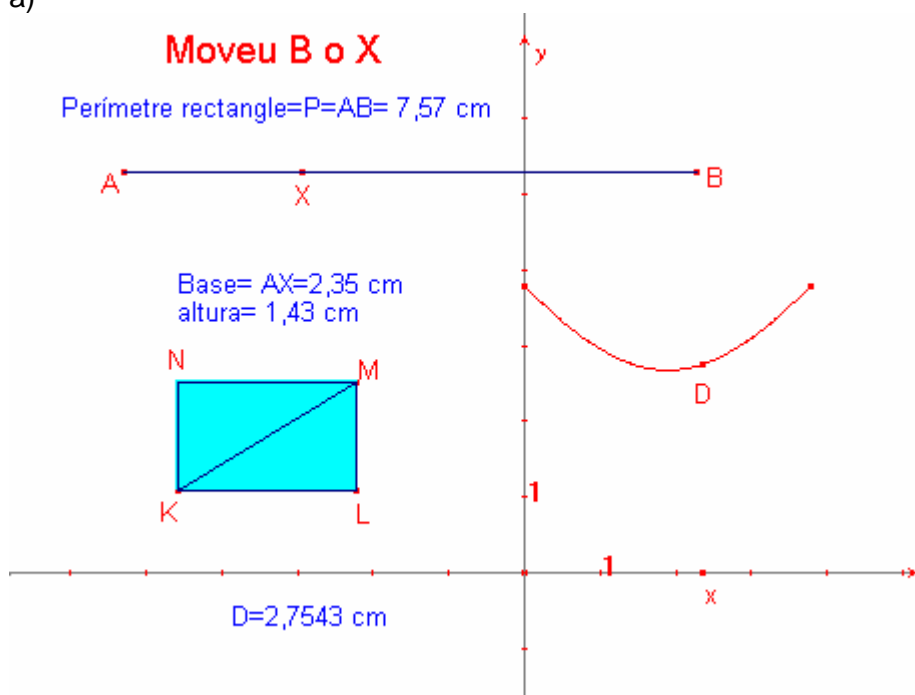
- Dibuixeu el triangle acutangle $\triangle ABC$.
- Dibuixeu les rectes BC, AC, AB .
- Dibuixeu la recta altura h_a perpendicular a la recta BC que passa per A .
- Feu la intersecció de les rectes BC, h_a . Anomeneu el punt D .
- Anàlogament dibuixeu les rectes altura h_b, h_c .
- Feu la intersecció de les rectes AC, h_b . Anomeneu el punt E .
- Feu la intersecció de les rectes AB, h_c . Anomeneu el punt F .
- Measureu els segments altura: $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$.
- Dibuixeu la recta r bisectriu a l'angle A .
- Dibuixeu la recta s bisectriu a l'angle B .
- Feu la intersecció de les rectes r, s . Anomeneu el punt I (incentre).
- Dibuixeu la recta t perpendicular al costat a que passa pel punt I .
- Feu la intersecció de la recta t i el costat a . Anomeneu el punt T .
- Dibuixeu la circumferència de centre I que passa pel punt T (circumferència inscrita al triangle).
- Measureu el segment $r = \overline{IT}$ (radi de la circumferència inscrita).
- Amb ajut de la calculadora calculeu $\frac{1}{\overline{AD}} + \frac{1}{\overline{BE}} + \frac{1}{\overline{CF}}$.
- Amb ajut de la calculadora calculeu $\frac{1}{\overline{IT}}$.
- Noteu que $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}$.



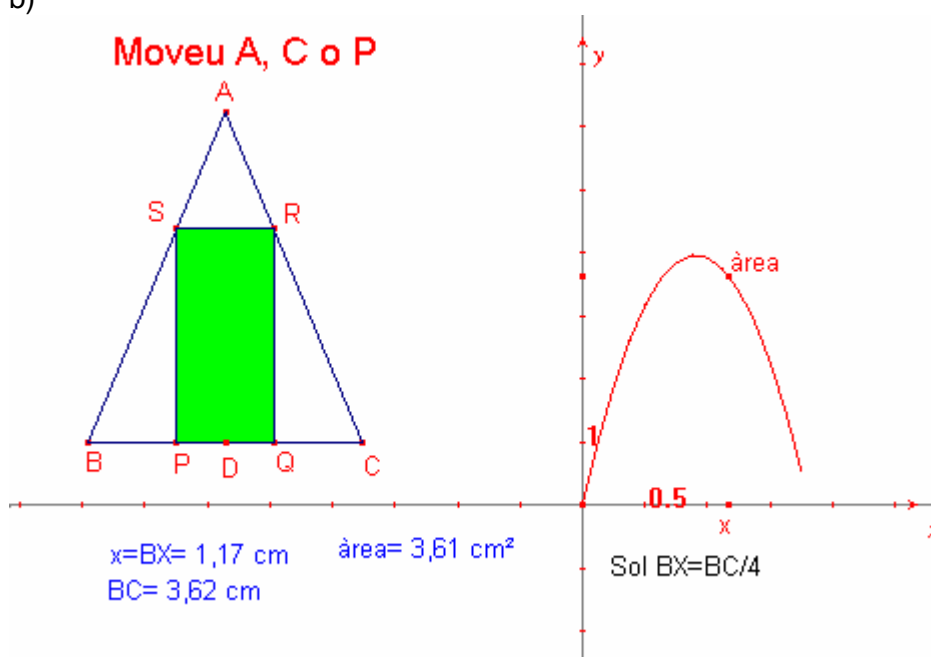
Problema 6: Exercicis d'optimització.

- a) De tots els rectangles de perímetre P determineu el que tinga mínima diagonal.
- b) Determineu el rectangle d'àrea màxima inscrit en un triangle isòsceles de base a i de costats iguals b .

a)



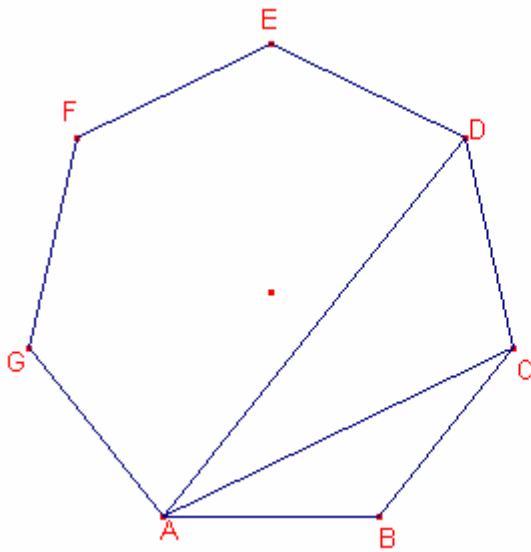
b)



Problema 7: Heptàgon regular.

Siga ABCDEFG un heptàgon regular. Proveu que $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$.

- a) Dibuixeu el heptàgon regular ABCDEFG.
- b) Dibuixeu els segments \overline{AC} , \overline{AD} .
- c) Mesureu els segments \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} .
- d) Amb ajut de la calculadora, calculeu $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$ i $\frac{1}{AB}$.
- e) Noteu que els resultats són iguals.



AD= 6,40 cm

AC= 5,13 cm

AB= 2,85 cm

$1/AD+1/AC= 0,3512468688$

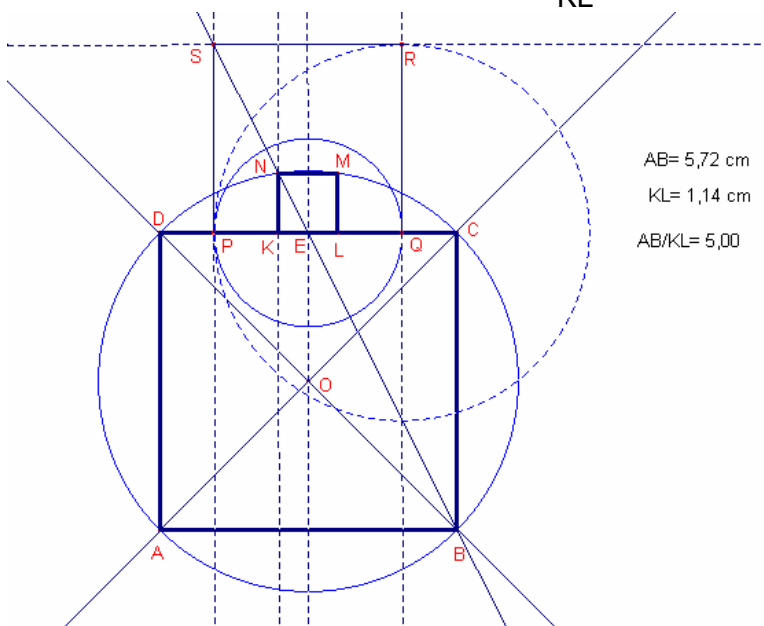
$1/AB= 0,3512468688$

Problema 8: Dos quadrat en un cercle.

Un quadrat de costat a està inscrit en una circumferència. Determineu el costat del quadrat inscrit en un dels segments circulars obtinguts.

Shariguin 160.

- Dibuixeu C_1 la circumferència de centre O .
- Dibuixeu la recta r que passa pel centre O .
- Feu la intersecció de la recta r i la circumferència C_1 . Anomeneu els punts A, C .
- Dibuixeu la recta s perpendicular a la recta r que passa pel centre O .
- Feu la intersecció de la recta s i la circumferència C_1 . Anomeneu els punts B, D .
- Dibuixeu el quadrat $ABCD$.
- Dibuixeu el punt mig del costat \overline{CD} . Anomeneu-lo E .
- Dibuixeu la C_2 circumferència de centre E .
- Feu la intersecció de la circumferència C_2 i el costat \overline{CD} . Anomeneu els punts P, Q .
- Dibuixeu la recta m perpendicular al costat \overline{CD} que passa pel punt P .
- Dibuixeu la recta n perpendicular al costat \overline{CD} que passa pel punt Q .
- Dibuixeu la circumferència C_3 de centre Q que passa per P .
- Feu la intersecció de la recta n i la circumferència C_3 . Anomeneu el punt R .
- Dibuixeu la recta t perpendicular a la recta n que passa pel punt R .
- Feu la intersecció de les rectes m, t . Anomeneu el punt S .
- Dibuixeu el quadrat $PQRS$.
- Dibuixeu la recta u que passa pels punts E, S .
- Feu la intersecció de la recta u i la circumferència C_1 . Anomeneu el punt N .
- Dibuixeu la recta v perpendicular al costat \overline{CD} que passa pel punt N .
- Feu la intersecció de la recta v i el costat \overline{CD} . Anomeneu el punt K .
- Dibuixeu la recta w mediatriu al costat \overline{CD} .
- Dibuixeu el punt simètric de K respecte de la recta w . Anomeneu el punt L .
- Dibuixeu el punt simètric de N respecte de la recta w . Anomeneu el punt M .
- Dibuixeu el quadrat $KLMN$, homotètic al quadrat $PQRS$.
- Mesureu els segments \overline{AB} , \overline{KL} .
- Amb ajut de la calculadora proveu que $\frac{\overline{AB}}{\overline{KL}} = 5$.

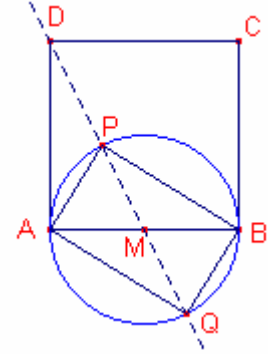


Problema 9: nombre d'or 1.

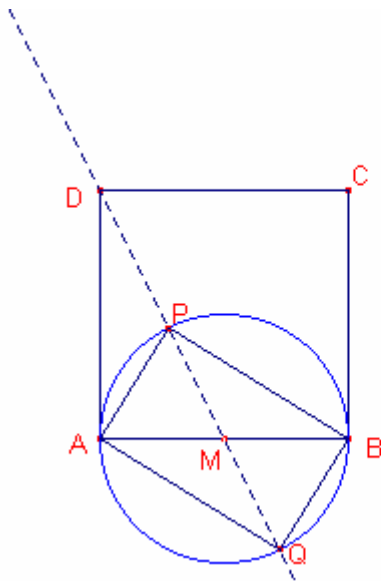
Siga M el punt mig del costat \overline{AB} del quadrat ABCD.

La recta MD talla el cercle de diàmetre \overline{AB} en el punt P.

Proveu que $\frac{PB}{PA} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



- Dibuixeu el quadrat ABCD (opció polígon regular).
- Dibuixeu el punt mig M del costat \overline{AB} .
- Dibuixeu C_1 la circumferència de centre M que passa pel punt A.
- Dibuixeu la recta r que passa pels punts D, M.
- Feu la intersecció de la circumferència C_1 i la recta r. Anomeneu els punts P, Q.
- Dibuixeu el rectangle AQB (opció polígon).
- Mesureu els segments \overline{PA} , \overline{PB} .
- Amb ajut de la calculadora, calculeu $\frac{PB}{PA}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
- Noteu que el resultat és el mateix.



PB= 2,79 cm

PA= 1,72 cm

PB/PA= 1,6180339887

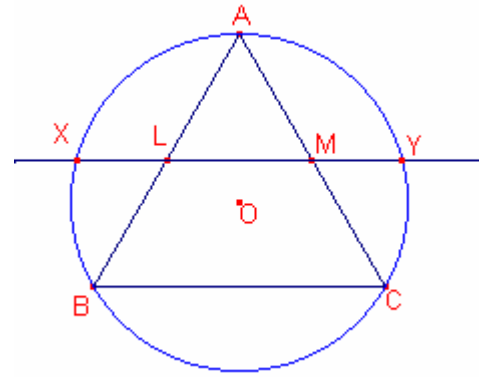
$(1+\sqrt{5})/2= 1,6180339887$

Problema 10: nombre d'or 2.

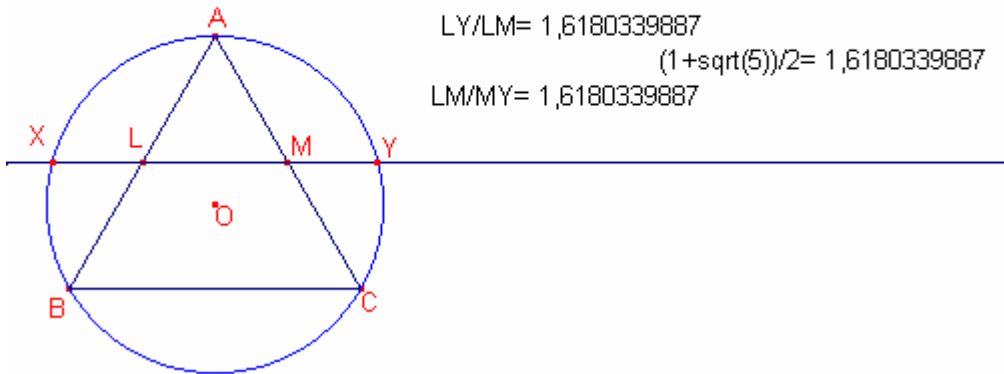
Siga el triangle equilàter $\triangle ABC$.
Siguen L, M els punts migs dels segments AB, AC, respectivament.

Siga C1 la circumferència circumscriu al triangle $\triangle ABC$.
La recta que passa pels punts L, M talla la circumferència C1 en els punts X, Y.

Proveu que $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\overline{LY}}{\overline{LM}} = \frac{\overline{LM}}{\overline{MY}}$.



- Dibuixeu el triangle equilàter $\triangle ABC$ de centre O (opció polígon regular).
- Dibuixeu la circumferència C_1 de centre O que passa pel punt A.
- Dibuixeu els punts migs L, M dels segments \overline{AB} , \overline{AC} , respectivament.
- Dibuixeu la recta r que passa pels punts L, M.
- Feu la intersecció de la recta r i la circumferència C_1 . Anomeneu els punts X, Y.
- Mesureu els segments \overline{LY} , \overline{LM} , \overline{MY} .
- Amb ajut de la calculadora, calculeu $\frac{\overline{LY}}{\overline{LM}}$, $\frac{\overline{LM}}{\overline{MY}}$, $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
- Noteu que els tres quocients són iguals.

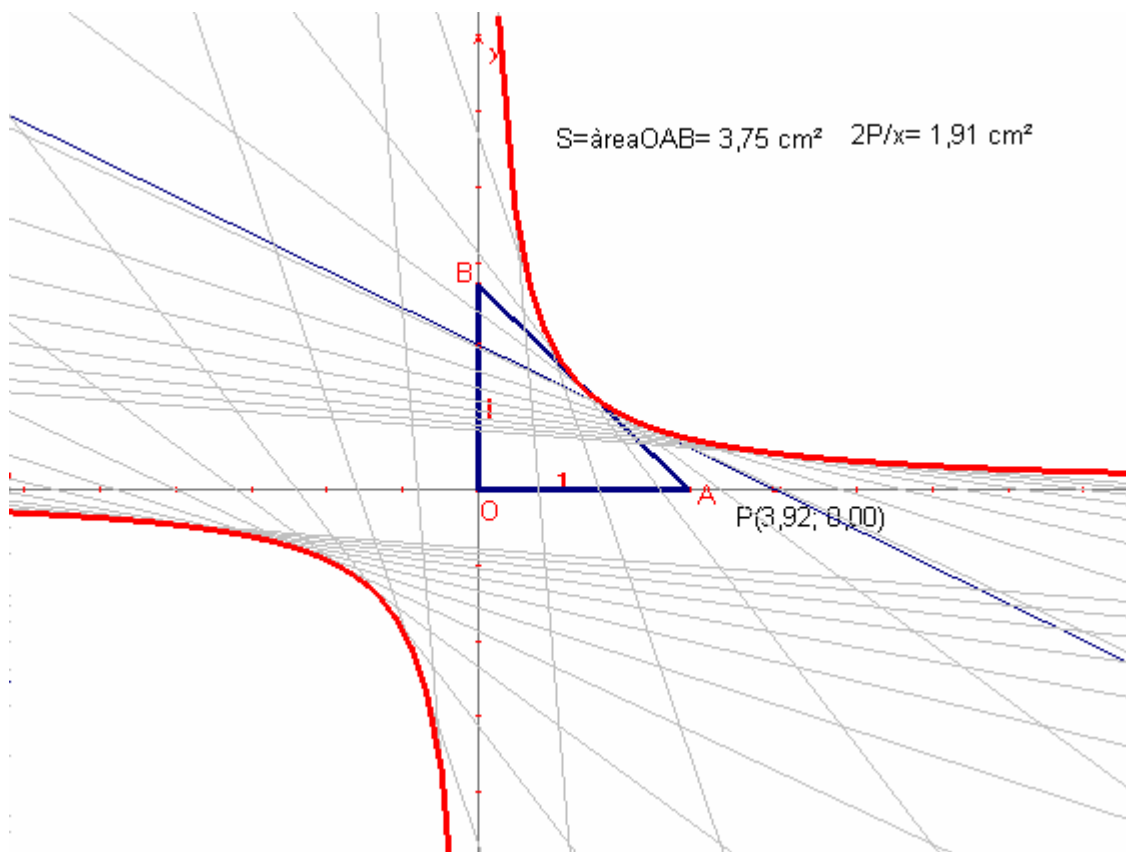


Problema 11: Oposicions de secundària 1.

Determineu l'envolupant de la família de rectes que formen amb els eixos coordenats triangles d'àrea constant S .

Oposicions de Castella la Manxa 2006.

- Mostreu els eixos coordenats d'origen O .
- Dibuixeu el punt A en l'eix d'abscisses i el punt B en l'eix d'ordenades.
- Dibuixeu el triangle OAB .
- Mesureu l'àrea del triangle OAB , S .
- Dibuixeu el punt P en l'eix d'abscisses.
- Calculeu les coordenades $P(x,0)$.
- Amb la calculadora, calculeu $y = 2P/x$.
- Transferiu el valor y a l'eix d'ordenades. Anomeneu el punt Q .
- Dibuixeu la recta r que passa pels punts P , Q .
- Dibuixeu el lloc geomètric de les rectes r al variar P sobre l'eix d'abscisses.
- Dibuixeu l'envolupant de les rectes r al variar P sobre l'eix d'abscisses.
- Noteu que és una hipèrbola.
- Amb Cabri 2+ es pot calcular l'equació de l'envolupant.



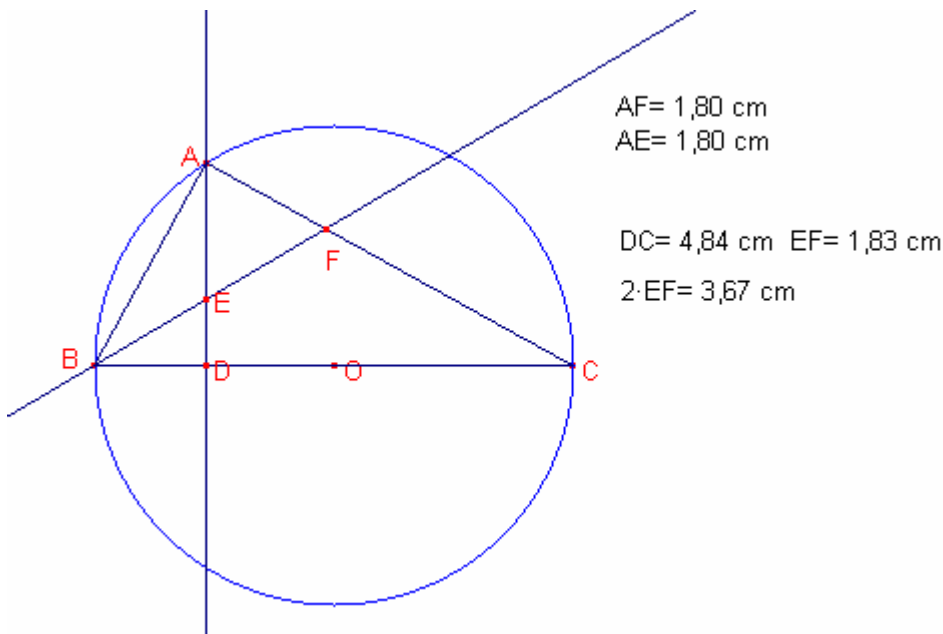
Problema 12: Oposicions de secundària 2.

En un triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$, siga \overline{AD} l'altura, siga \overline{BF} la bisectriu i E la intersecció de \overline{AD} , \overline{BF} . Proveu que:

- c) El triangle $\triangle AEF$ és isòsceles.
- d) $\overline{DC} > 2 \cdot \overline{EF}$.

Oposicions València 2005.

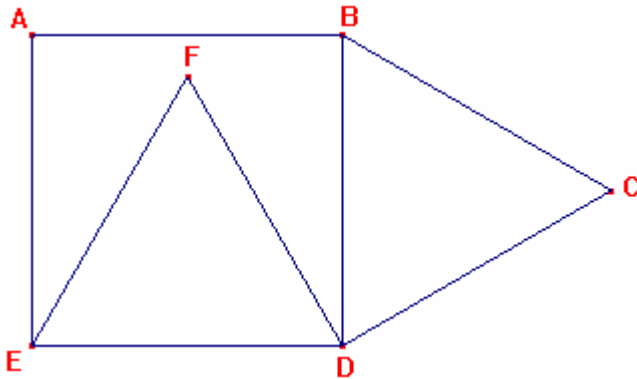
- a) Dibuixeu el segment \overline{BC} .
- b) Dibuixeu el punt mig O del segment \overline{BC} .
- c) Dibuixeu la circumferència C_1 de centre O que passa pel punt B.
- d) Dibuixeu un punt A sobre la circumferència C_1 .
- e) Dibuixeu el triangle rectangle $\triangle ABC$.
- f) Dibuixeu la recta r perpendicular al costat \overline{BC} que passa pel punt A.
- g) Feu la intersecció de la recta r i el costat \overline{BC} . Anomeneu el punt D.
- h) Dibuixeu recta s la bisectriu de l'angle B.
- i) Feu la intersecció de la recta s i el costat \overline{AC} . Anomeneu el punt F.
- j) Feu la intersecció de les rectes r, s. Anomeneu el punt E.
- k) Mesureu els segments \overline{AF} , \overline{AE} .
- l) Noteu que són iguals.
- m) Mesureu els segments \overline{CD} , \overline{EF} .
- n) Amb ajut de la calculadora, calculeu $2 \cdot \overline{EF}$.
- o) Noteu que $\overline{DC} > 2 \cdot \overline{EF}$.



Solucions analítiques

Problema 1. Un quadrat i dos triangles equilàters

ABDE és un quadrat; DEF i BCD són dos triangles equilàters.
Demostreu que els punts A, F i C són alineats.



Solució 1:

A, F, C són alineats si l'angle $\angle AFC$ és pla.

El triangle $\triangle AFE$ és isòsceles.

$\angle AEF = 30^\circ$, per tant, $\angle EAF = \angle EFA = 75^\circ$.

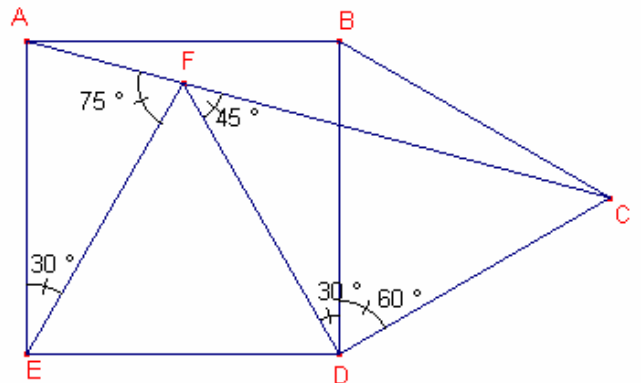
El triangle $\triangle DCF$ és isòsceles.

$\angle FDC = 90^\circ$, per tant, $\angle DFC = \angle DCF = 45^\circ$

L'angle $\angle EFD = 60^\circ$

$\angle EFA + \angle EFD + \angle DFC = 75^\circ + 60^\circ + 45^\circ = 180^\circ$

Per tant, $\angle AFC = 180^\circ$



Solució 2:

Considerem el sistema de referència cartesià: $\{\vec{E}, \vec{ED}, \vec{EA}\}$

Els punts A, F, C són alineats si els vectors \vec{AF}, \vec{AC} són proporcionals.

Les coordenades dels punts E, D, B, A són E(0,0), D(1,0), B(1,1), A(0,1)

Utilitzant el teorema de Pitàgores les coordenades del punt F són $F\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Utilitzant el teorema de Pitàgores les coordenades del punt C són $C\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Calculem les coordenades dels vectors \vec{AF}, \vec{AC}

$$\vec{AF} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) \quad \vec{AC} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Dividim les coordenades dels dos vectors:

$$\frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} \quad \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-\frac{1}{2}} = -(\sqrt{3} - 2) = 2 - \sqrt{3}$$

Per tant els dos vectors són proporcionals.

Solució 3:

Considerem el sistema de referència cartesià: $\{\vec{E}, \vec{ED}, \vec{EA}\}$

Determinem la recta r que passa pels punts A, C. Els punts A, F, C estan alineats si el punt F pertany a la recta r .

Les coordenades dels punts E, D, B, A són $E(0,0)$, $D(1,0)$, $B(1,1)$, $A(0,1)$

Utilitzant el teorema de Pitàgores les coordenades del punt F són $F\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Utilitzant el teorema de Pitàgores les coordenades del punt C són $C\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

La recta que passa pels punts $A(0,1)$ $C\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ té per equació:

$$r \equiv y - 1 = -(2 - \sqrt{3})x$$

Vegem si el punt $F\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pertany a la recta:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -(2 - \sqrt{3})\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3} - 2}{2} = \frac{\sqrt{3} - 2}{2}$$

Per tant F pertany a la recta r i els 3 punts són alineats.

Solució 4:

Els punts A, F, C són alineats si les imatges per una rotació de centre D i angle 60° són alineats.

La imatge de C és B.

La imatge de F és E

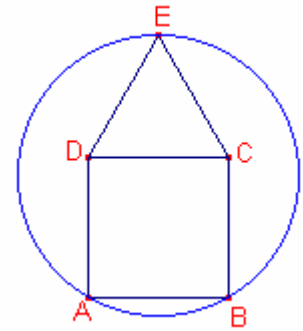
La imatge de A és un punt equidistant de A i de D per tant està en la recta mediatriu de la recta AD que és la recta BE.

Per tant els tres punts A, F, C estan alineats.

Problema 2: Un quadrat, un triangle equilàter i un cercle.

Un triangle equilàter està dibuixat al defora del costat superior del quadrat ABCD de costat 1 com mostra la figura.

Si una circumferència passa pels punts A, B i E. Quin és el radi del cercle.



Solució:

El triangle $\triangle AED$ és isòsceles, $\overline{AD} = \overline{DE} = 1$.

$$\angle ADE = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ.$$

$$\angle DEA = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

$$\angle CEB = 15^\circ.$$

$$\angle AEB = 60^\circ - 2 \cdot \angle DEA = 60^\circ - 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ.$$

L'angle $\angle AEB$ és un angle inscrit en la circumferència que mesura 30° aleshores l'arc és de 60° .

Aleshores l'arc mesura la sisena part de la circumferència.

Aleshores la corda \overline{AB} mesura el mateix que el radi.

Per tant el radi de la circumferència és igual $\overline{AB} = 1$.

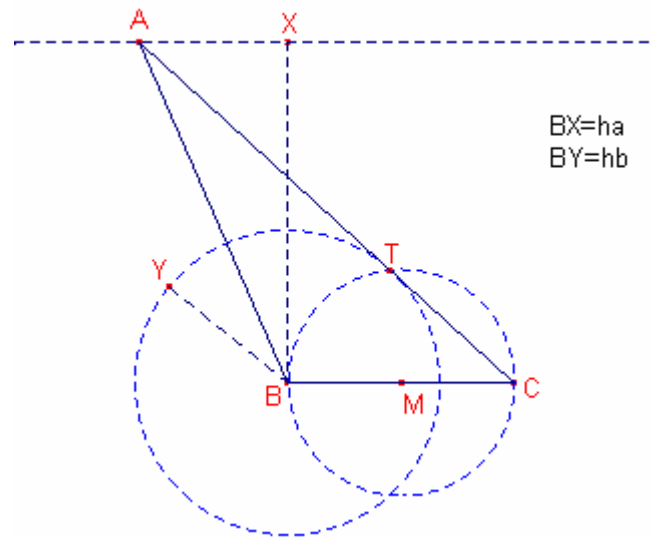
Problema 3: Resolució de triangles.

a) Resoleu el triangle coneguts $a = 6, h_A = 9, h_B = 4$

b) Resoleu el triangle coneguts $a = 10, b = 15, h_A = 8$

Solució:

a)



$$\text{L'Àrea } \triangle ABC = \frac{a \cdot h_A}{2} = \frac{6 \cdot 9}{2} = 27$$

$$\text{L'Àrea } \triangle ABC = \frac{b \cdot h_B}{2}, \text{ aleshores, } \frac{b \cdot 4}{2} = 27, \quad b = 13'5$$

Considerem el triangle rectangle $\triangle BTC$, $T = 90^\circ$

$$\sin C = \frac{4}{6}, \text{ per tant, } C = \arcsin\left(\frac{4}{6}\right) \cong 41^\circ 48' 37''$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

$$c^2 = 6^2 + 13'5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 13'5 \cdot \cos(41^\circ 48' 37'')$$

$$c^2 \cong 97'5023$$

$$c \cong 9'8743$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

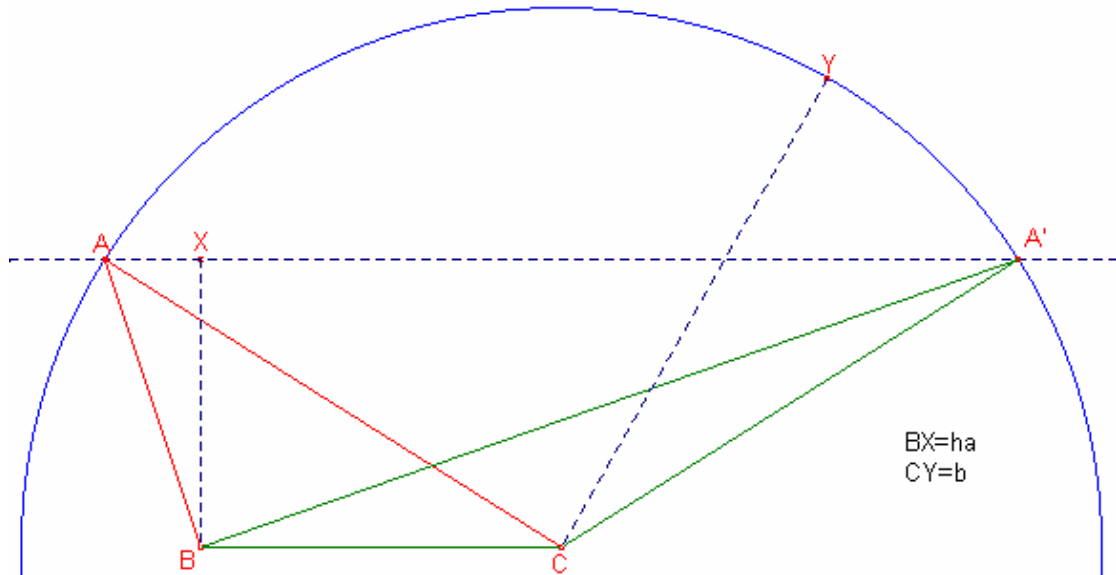
$$\cos A = \frac{6^2 - 13'5^2 - 97'5023}{-2 \cdot 13'5 \cdot 9'8743} \cong 0'9143$$

$$A = \arccos(0'9143) \cong 23^\circ 53' 47''$$

$$\text{L'angle } B = 180^\circ - (A + C)$$

$$B = 180^\circ - (41^\circ 48' 37'' + 23^\circ 53' 47'') = 114^\circ 17' 36''$$

b)



$$l' \text{ Àrea } \triangle ABC = \frac{a \cdot h_A}{2} = \frac{10 \cdot 8}{2} = 40$$

$$\sin C = \frac{h_A}{a} = \frac{8}{15}, \text{ per tant, } C = \arcsin \frac{8}{15} = \begin{cases} 32^\circ 13' 51'' \\ 147^\circ 46' 9'' \end{cases}$$

Cas 1: $C = 32^\circ 13' 51''$	Cas 2: $C = 147^\circ 46' 9''$
<p>Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$</p> $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$ $c^2 = 10^2 + 15^2 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \cos(32^\circ 13' 51'')$ $c^2 \cong 71'2281$ $c \cong 8'4397$ <p>Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$</p> $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ $\cos A = \frac{10^2 - 15^2 - 71'2281}{-2 \cdot 15 \cdot 8'4397} \cong 0'7750$ $A = \arccos(0'7750) \cong 39^\circ 11' 35''$ <p>L'angle $B = 180^\circ - (A + C)$</p> $B = 180^\circ - (39^\circ 11' 35'' + 32^\circ 13' 51'') = 108^\circ 34' 34''$	<p>Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$</p> $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$ $c^2 = 10^2 + 15^2 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \cos(147^\circ 46' 9'')$ $c^2 \cong 578'7719$ $c \cong 24'0577$ <p>Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$</p> $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ $\cos A = \frac{10^2 - 15^2 - 578'7719}{-2 \cdot 15 \cdot 24'0577} \cong 0'9751$ $A = \arccos(0'9751) \cong 12^\circ 48' 30''$ <p>L'angle $B = 180^\circ - (A + C)$</p> $B = 180^\circ - (12^\circ 48' 30'' + 147^\circ 46' 9'') = 19^\circ 25' 21''$

Problema 4: propietat de l'ortocentre

Siga el triangle acutangle $\triangle ABC$. Siguen \overline{AD} , \overline{BE} , \overline{CF} les altures del triangle. Siga H l'ortocentre. Demostreu que $\frac{\overline{AH}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BH}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{CH}}{\overline{CF}} = 2$.

Solució:

Denotem $[XYZ]$ = àrea del triangle XYZ .

Si el triangle és acutangle H pertany a l'interior del triangle.

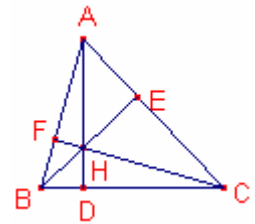
$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BH}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{CH}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{AD} - \overline{HD}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BE} - \overline{HE}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{CF} - \overline{HF}}{\overline{CF}} = 3 - \left(\frac{\overline{HD}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{HE}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{HF}}{\overline{CF}} \right) \quad (1)$$

Els triangles $\triangle ABC$, $\triangle HBC$ tenen la mateixa base \overline{BC} , aleshores, les àrees són proporcionals a les altures:

$$\frac{\overline{HD}}{\overline{AD}} = \frac{[HBC]}{[ABC]}. \text{ Anàlogament, } \frac{\overline{HE}}{\overline{BE}} = \frac{[HCA]}{[ABC]}, \quad \frac{\overline{HF}}{\overline{CF}} = \frac{[HAB]}{[ABC]}.$$

Substituint en l'expressió (1):

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AH}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BH}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{CH}}{\overline{CF}} &= 3 - \left(\frac{\overline{HD}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{HE}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{HF}}{\overline{CF}} \right) = 3 - \left(\frac{[HBC]}{[ABC]} + \frac{[HCA]}{[ABC]} + \frac{[HAB]}{[ABC]} \right) = \\ &= 3 - \frac{[HBC] + [HCA] + [HAB]}{[ABC]} = 3 - \frac{[ABC]}{[ABC]} = 2. \end{aligned}$$



Problema 5: Relació entre les altures i radi de la circumferència inscrita d'un triangle.

Considerem el triangle $\triangle ABC$, siga r el radi de la circumferència inscrita.
Siguen h_1, h_2, h_3 les 3 altures del triangle.

Aleshores, $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}$.

Solució:

Siguen h_1, h_2, h_3 les altures referides als costats, a, b, c , respectivament.

Calculem l'àrea, del triangle $\triangle ABC$.

$$S = \frac{a \cdot h_1}{2}, \quad S = \frac{b \cdot h_2}{2}, \quad S = \frac{c \cdot h_3}{2}$$

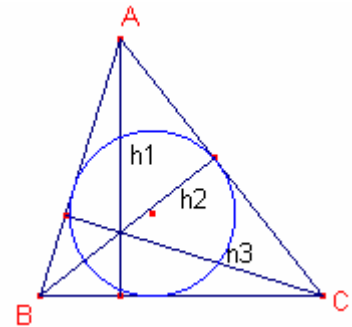
$S = r \cdot p$, on r és el radi de la circumferència inscrita i p el semiperímetre del triangle

$\triangle ABC$.

Igualant les àrees tenim que:

$$h_1 = \frac{2r \cdot p}{a}, \quad h_2 = \frac{2r \cdot p}{b}, \quad h_3 = \frac{2r \cdot p}{c}.$$

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{a}{2r \cdot p} + \frac{b}{2r \cdot p} + \frac{c}{2r \cdot p} = \frac{a+b+c}{2r \cdot p} = \frac{2p}{2r \cdot p} = \frac{1}{r}.$$



Problema 6: Exercicis d'optimització.

a) De tots els rectangles de perímetre P determineu el que tinga mínima diagonal.

b) Determineu el rectangle d'àrea màxima inscrit en un triangle isòsceles de base a i de costats iguals b (la base del rectangle es troba en el costat desigual del triangle isòsceles).

Solució:

a)

Siga KLMN un quadrat de perímetre P

Siguen $a = \overline{KL}$, $b = \overline{LM}$ els costats del rectangle.

$$2a + 2b = P, \text{ aleshores, } b = \frac{P - 2a}{2} \quad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle KLM$, la diagonal del rectangle és:

$$D(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Substituint l'expressió (1):

$$D(a) = \sqrt{a^2 + \left(\frac{P - 2a}{2}\right)^2}$$

$$D(a) = \frac{\sqrt{8a^2 - 4Pa + P^2}}{2}.$$

$$\text{Siga } f(a) = 8a^2 - 4Pa + P^2, \quad g(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

$$D(a) = g \circ f(a)$$

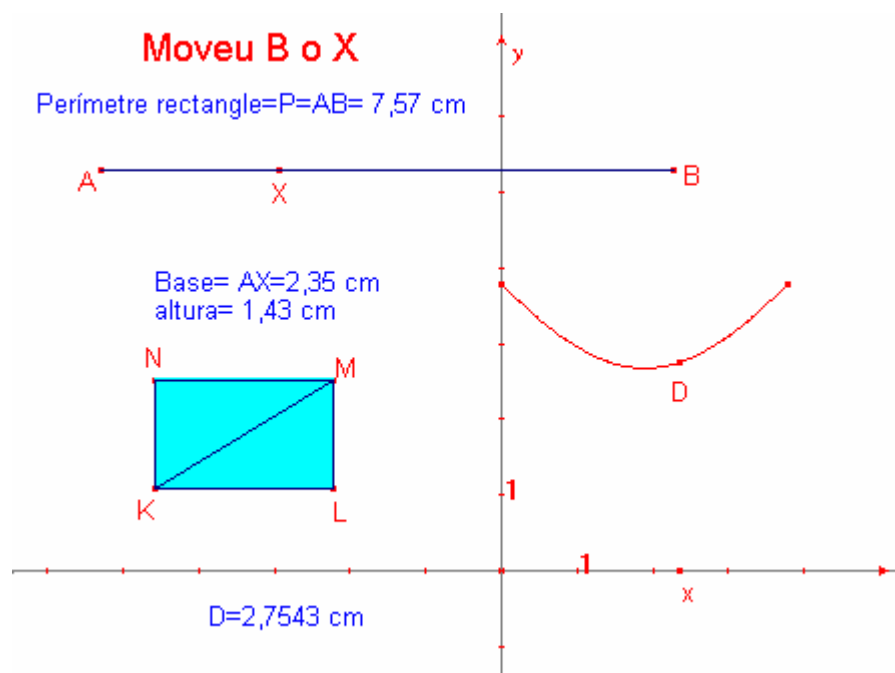
La funció $g(a)$ és contínua i creixent

El mínim de la funció $D(a)$ s'assoleix en el mínim de la funció $f(a)$.

La funció $f(a)$ és una paràbola còncaua, el seu mínim s'assoleix en el vèrtex, és a dir,

$$\text{quan } a = \frac{4P}{16} = \frac{P}{4}, \text{ aleshores, } b = \frac{P}{4}.$$

En aquest cas KLMN és un quadrat.



b)

Siga el triangle isòsceles $\triangle ABC$, $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AB} = \overline{AC}$.
Considerem el rectangle PQRS.

Siga $x = \overline{BP}$, $y = \overline{PS}$.

$$\overline{PQ} = a - 2x.$$

L'àrea del rectangle PQRS és:

$$S(x, y) = (a - 2x)y.$$

Els triangles $\triangle BPS$, $\triangle BDA$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{\frac{a}{2}}.$$

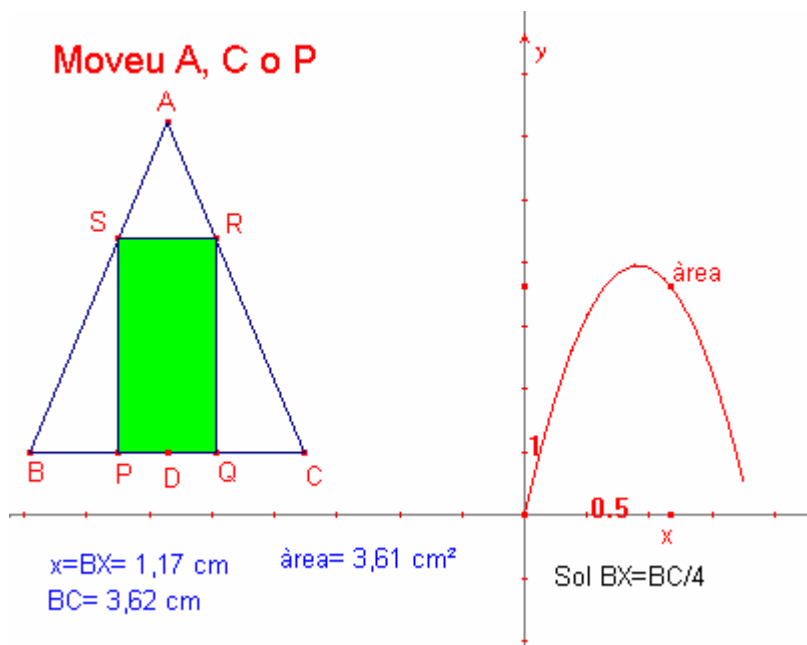
Aïllant la incògnita y:

$$y = \frac{1}{a} \sqrt{4b^2 - a^2} x.$$
 Substituint en la funció àrea:

$$S(x) = \frac{1}{a} \sqrt{4b^2 - a^2} (a - 2x)x.$$

Aquesta funció és una paràbola convexa, el màxim s'assoleix en el vèrtex de la paràbola, és a dir, quan $x = \frac{a}{4}$.

Les mesures del rectangle són, $\overline{PQ} = \frac{a}{2}$, $\overline{PS} = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}$, és a dir, el costat és la meitat de la base i l'altura la meitat de l'altura del triangle isòsceles.



Problema 7: Heptàgon regular.

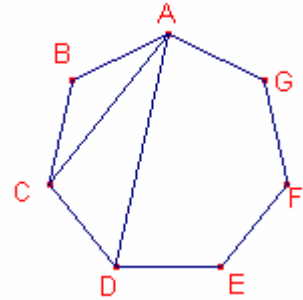
Siga ABCDEFG un heptàgon regular. Proveu que $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$.

Solució 1:

Siga $a = \overline{AB}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AD}$.

Siga $\alpha = \angle BDA$. $7\alpha = 180^\circ$.

Aleshores, $\angle BAD = 2\alpha$, $\angle ABD = 4\alpha$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\triangle ABD$:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin 2\alpha}, \text{ aleshores, } b = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} a$$

$$\frac{b}{\sin 2\alpha} = \frac{c}{\sin 4\alpha}, \text{ aleshores, } c = b \frac{\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 4\alpha}{\sin \alpha} a.$$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\sin \alpha}{a \cdot \sin 2\alpha} + \frac{\sin \alpha}{a \sin 4\alpha} = \frac{1}{a} \left(\frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{\sin \alpha}{\sin 4\alpha} \right) = \frac{1}{a} \frac{\sin \alpha (\sin 4\alpha + \sin 2\alpha)}{\sin 2\alpha \cdot \sin 4\alpha} =$$

Notem que $4\alpha = 180^\circ - 4\alpha$, aleshores, $\sin 3\alpha = \sin 4\alpha$:

$$= \frac{1}{a} \frac{\sin \alpha \cdot 2 \cdot \sin 3\alpha \cdot \cos \alpha}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin 3\alpha} = \frac{1}{a}$$

Solució 2:

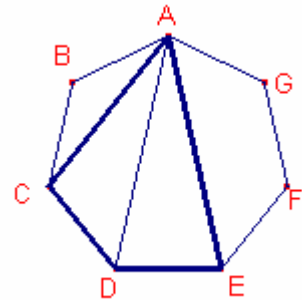
Siga $a = \overline{AB} = \overline{CD} = \overline{DE}$, $b = \overline{AC} = \overline{CE}$, $c = \overline{AD} = \overline{AE}$.

Aplicant el teorema de Tolomeu:

$$ac + ab = bc.$$

Dividint la igualtat per abc :

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a}.$$



Problema 8: Dos quadrat en un cercle.

Un quadrat de costat a està inscrit en una circumferència. Determineu el costat del quadrat inscrit en un dels segments circulars obtinguts.
Shariguin I60.

Solució:

Siga ABCD un quadrat de costat $a = \overline{AB}$. Siga O el seu centre.

Siga la circumferència circumscrita al quadrat ABCD.

Aplicat el teorema de Pitàgores els seu radi és:

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Siga EFGH el quadrat inscrit en un segment circular:

Siga $x = \overline{EF}$.

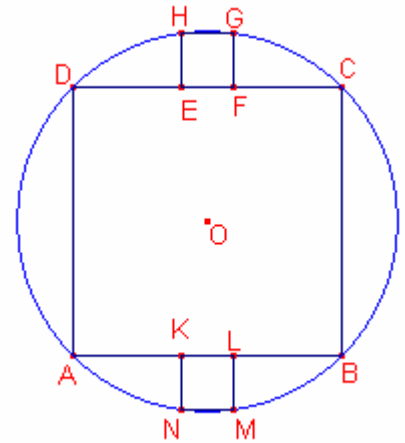
Siga KLMN el quadrat simètric de EFGH respecte del centre O del quadrat inicial.

$$\overline{HK} = 2R = \sqrt{2}a, \quad \overline{GM} = 2x + a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\triangle HGM$:

$$(2x + a)^2 + x^2 = (\sqrt{2}a)^2. \text{ Resolent l'equació en la incògnita } x:$$

$$x = \frac{a}{5}.$$

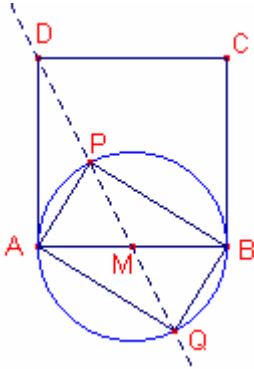


Problema 9: nombre d'or 1.

Siga M el punt mig del costat \overline{AB} del quadrat ABCD.

La recta MD talla el cercle de diàmetre \overline{AB} en el punt P.

Proveu que $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



Solució:

Considerem el plànol cartesià d'origen A(0,0)

Considerem B(2,0), C(2,2), D(0,2), M(1,0)

Considerem la circumferència C_1 de centre M i diàmetre \overline{AB} que té equació:

$$C_1 \equiv (x-1)^2 + y^2 = 1$$

La recta r que passa pels punts M, D té per equació:

$$r \equiv y = -2(x-1)$$

Determinem el punt P intersecció de la recta r i la circumferència C_1

$$\begin{cases} y = -2x + 2 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Té per solucions: } \begin{cases} x = \frac{5-\sqrt{5}}{5} \\ y = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{5}}{5} \\ y = \frac{-2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Calculem les distàncies: $d(A,P)$, $d(B,P)$

$$d(B,P) = \sqrt{2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}, \quad d(A,P) = \sqrt{2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

Efectuem el quocient de les distàncies:

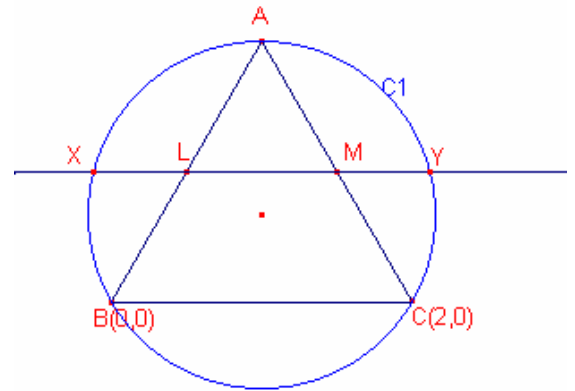
$$\frac{\overline{BP}}{\overline{AP}} = \frac{\sqrt{2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}}}{\sqrt{2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}}} = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{10 - 2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{120 + 40\sqrt{5}}{80}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \sqrt{1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{1 + \Phi} = \Phi$$

Problema 10: nombre d'or 2.

Siga el triangle equilàter $\triangle ABC$.
Siguen L, M els punts migs dels segments AB, AC, respectivament.

Siga C1 la circumferència circumscriu al triangle $\triangle ABC$.
La recta que passa pels punts L, M talla la circumferència C1 en els punts X, Y.

Proveu que $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\overline{LY}}{\overline{LM}} = \frac{\overline{LM}}{\overline{MY}}$



Solució 1: (Amb coordenades cartesianes).

Considerem El triangle $\triangle ABC$, tal que $B(0,0)$, $C(2,0)$.

Per ser el triangle equilàter $A(1,\sqrt{3})$

Les coordenades dels punts L, M són: $L\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Siga C1 la circumferència circumscriu al triangle $\triangle ABC$ de centre O i radi R

El centre O té coordenades $O\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

El radi de la circumferència circumscriu C1 és: $R = \sqrt{\frac{4}{3}}$

L'equació de la circumferència C1 és: $C1 \equiv (x-1)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$

L'equació de la recta r que passa pels punts L, M és: $r \equiv y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Les interseccions de la circumferència C1 i la recta r són:

$$X\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), Y\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\overline{LM} = 1. \quad \overline{LY} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \quad \overline{MY} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Aleshores: $\frac{\overline{LY}}{\overline{LM}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi. \quad \frac{\overline{LM}}{\overline{MY}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$

Demostració 2 trigonomètrica:

Considerem el triangle $\triangle ABC$ de costat $AB = 2$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\triangle ALC$. $CL = \sqrt{3}$

Aleshores $LM = 1$.

Considerem el triangle $\triangle OLM$

Per la propietat del baricentre del triangle $\triangle ABC$:

$$OL = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad OC = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

L'angle $\angle MLO = 30^\circ$.

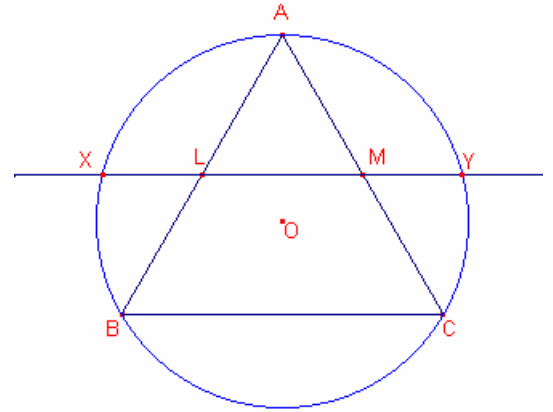
Considerem el triangle $\triangle LOY$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle LOY$.

$$\overline{OY}^2 = \overline{OL}^2 + \overline{LY}^2 - 2 \cdot \overline{OL} \cdot \overline{LY} \cdot \cos 30^\circ.$$

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{3} + \overline{LY}^2 - \overline{LY}. \text{ Simplificant:}$$

$$\overline{LY}^2 - \overline{LY} - 1 = 0. \text{ Aleshores, } \overline{LY} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$



Problema 11: Oposicions de secundària 1.

Determineu l'envolupant de la família de rectes que formen amb els eixos coordenats triangles d'àrea constant S .

Oposicions de Castella la Manxa 2006.

Solució:

Siga la recta que passa pels punts $P(a,0)$,
 $Q(0,b)$ una recta de l'envolupant.

L'àrea del triangle $\triangle OPQ$ és S .

Aleshores: $ab = 2S$.

Aquesta recta té equació $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$$= \frac{x}{a} + \frac{a}{2S}y = 1$$

$$\text{Siga } f(x,y,a) = \frac{x}{a} + \frac{a}{2S}y - 1$$

La corba envolupant a compleix:

$$\begin{cases} f(x,y,a) = 0 \\ \frac{d}{da} f(x,y,a) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{a}{2S}y - 1 = 0 \\ -\frac{x}{a^2} + \frac{y}{2S} = 0 \end{cases}$$

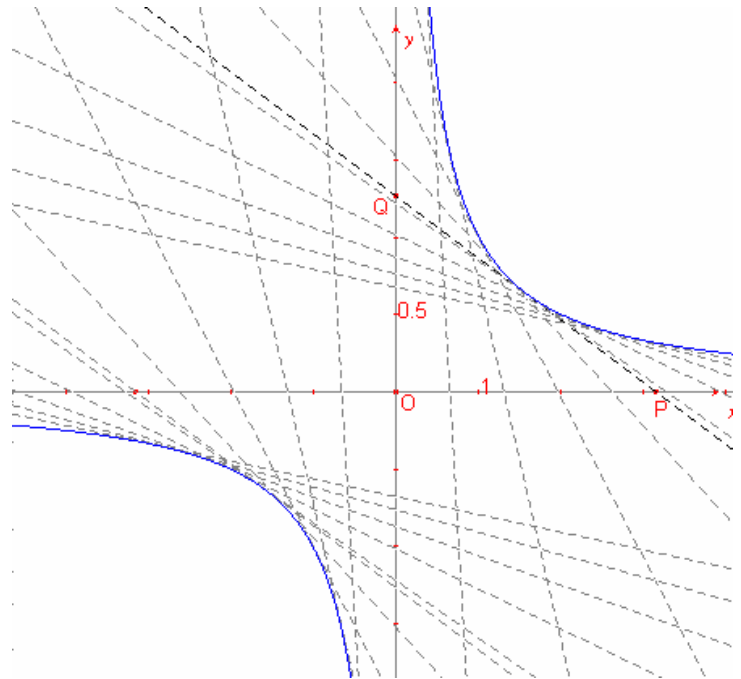
$$\text{Aïllant } a \text{ de la segona equació: } a = \sqrt{2S \frac{x}{y}}.$$

$$\text{Substituint en la primera equació: } \frac{x}{\sqrt{2S \frac{x}{y}}} + \frac{\sqrt{2S \frac{x}{y}}}{2S} - 1 = 0$$

$$2\sqrt{\frac{xy}{2S}} = 1.$$

Elevant al quadrat:

$$xy = \frac{S}{2}.$$



Problema 12: Oposicions de secundària 2.

En un triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$, siga \overline{AD} l'altura, siga \overline{BF} la bisectriu i E la intersecció de \overline{AD} , \overline{BF} . Proveu que:

e) El triangle $\triangle AEF$ és isòsceles.

f) $\overline{DC} > 2 \cdot \overline{EF}$.

Oposicions València 2005

Solució:

a)

$$\angle EBD = \frac{B}{2}, \quad \angle BED = 90^\circ - \frac{B}{2}.$$

$$\angle AEF = \angle BED = 90^\circ - \frac{B}{2} \text{ (angles oposats pel vèrtex).}$$

$$\angle DAC = B. \quad \angle AFE = 180^\circ - \left(B + 90^\circ - \frac{B}{2} \right) = 90^\circ - \frac{B}{2}.$$

Aleshores, $\angle AFE = \angle AEF$, per tant, $\triangle AEF$ és isòsceles, $\overline{AF} = \overline{AE}$.

b)

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle ADC$:

$$\overline{CD} = b \cdot \sin B = \frac{b^2}{a}.$$

Aplicant la propietat de la bisectriu al triangle $\triangle ABC$:

$$\frac{\overline{AF}}{c} = \frac{b - \overline{AF}}{a}, \text{ aleshores, } \overline{AF} = \frac{bc}{a+c}.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle AEF$:

$$\overline{EF}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{AE}^2 - 2 \cdot \overline{AF} \cdot \overline{AE} \cdot \cos B.$$

$$\overline{EF}^2 = \frac{b^2 c^2}{(a+c)^2} + \frac{b^2 c^2}{(a+c)^2} - 2 \frac{b^2 c^2}{(a+c)^2} \frac{c}{a}. \quad \overline{EF}^2 = \frac{2b^2 c^2}{(a+c)^2} \left(\frac{a-c}{a} \right).$$

$$\frac{\overline{EF}^2}{\overline{CD}^2} = \frac{\frac{2b^2 c^2}{(a+c)^2} \left(\frac{a-c}{a} \right)}{\frac{b^4}{a^2}} = \frac{2c^2(a-c)a}{b^2(a+c)} = \frac{2c^2(a-c)a}{(a^2 - c^2)(a+c)} = \frac{2ac^2}{(a+c)^3}.$$

Vegem que $\frac{\overline{EF}^2}{\overline{CD}^2} < \frac{1}{4}$. Siga la funció, $f(x) = \frac{2ax^2}{(a+x)^3}$ tal que $a > 0$, $x \in [0, a]$.

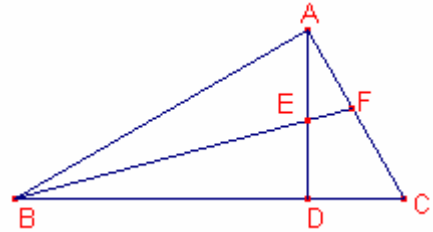
Vegem que la funció $f(x)$ és creixent en aquest interval.

$$f'(x) = \frac{2ax(-x+2a)}{(a+x)^4}, \quad f'(x) > 0 \text{ quan } x \in]0, a[.$$

El màxim s'assoleix quan $x = a$.

$$f(x) < f(a) = \frac{2a^3}{(2a)^3} = \frac{1}{4}.$$

Aleshores, $\frac{\overline{EF}^2}{\overline{CD}^2} < \frac{1}{4}$. Per tant, $\overline{DC} > 2 \cdot \overline{EF}$.



Bibliografia.

- PUIG ADAM, P., *Curso de geometría métrica. tomo 1. Fundamentos*. Nuevas gráficas S.A. 8ª ed., Madrid, 1965
- PUIG ADAM, P., *Curso de geometría métrica. tomo 2. Complementos*. Nuevas gráficas S.A., 7ª ed., Madrid, 1961.
- ROANES MACIAS, E., *Introducción a la geometría*. Anaya, Madrid, 1980.
- GELTNER, P.B. PETERSON, D.J. *Geometría*. Ed. Thomson editores. Mèxic. 1998.
- VELASCO SOTOMAYOR, G. *Tratado de Geometría*. Ed. Limusa. Mèxic. 1983.
- LEVI S. SHIVELY, PH.D. *Introducción a la Geometría Moderna*. Compañía editorial continental. Mèxic. 1972.
- COXETER, H.S.M. *Retorno a la geometría*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 1. Madrid. 1994.
- COXETER, H.S.M. *Fundamentos de geometría*. Ed. Limusa. Mèxic. 1971.
- GONZÁLEZ, M. i PALENCIA, J. *Trazado geométrico*. Editorial: els autors. Sevilla.
- REDÓN GÓMEZ, A. *Geometría paso a paso*. Ed. Tébar. 2000.
- ALSINA, C. i altres, *Invitación a la didáctica de la geometría*. Síntesis, Colección: Matemáticas: cultura y aprendizaje, 12, Madrid, 1992.
- MARTÍNEZ RECIO, A. i altres, *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría*. Síntesis, Colección: Matemáticas: cultura y aprendizaje, 16, Madrid, 1989.
- GUSIEV, V. i altres, *Prácticas para resolver problemas matemáticos. Geometría*. Editorial Mir. Moscou, 1989.
- SHARIGUIN, I., *Problemas de geometría. Planimetría*. Editorial Mir. Moscou, 1986.
- LIDSKI V. i altres. Problemas de matemáticas elementales. Ed Mir. Coscou, 1983.
- GREMILLION, D. i altres, *Cabri géomètre II. Manual para Macintosh y MS-DOS*.
- LYÚBICH, Yu.I. i SHOR, L.A. *Método cinemático en problemas geométricos*. Editorial Mir Moscou 1978. Col·lecció: Lecciones populares de matemáticas.
- NATASON, I.P. *Problemas elementales de máximo y mínimo*. Ed. Mir. Moscou 1977. Col·lecció Lecciones populares de matemáticas.
- SMOGORZHEVSKI, A.S. *La regla en construcciones geométricas*. Ed. Mir. Moscou 1988. Col·lecció Lecciones populares de matemáticas.
- KOSTOVSKI, A.N. *Construcciones geométricas mediante compás*. Ed. Mir. Moscou. 1984. Col·lecció Lecciones populares de matemáticas.
- JAIME, A. GUTIÉRREZ, A. *El grupo de la isometrias del plano*. Ed. Síntesis. Col. Educación matemática en secundaria, 13. Madrid. 1996.
- Mathematical Association of America. *Concursos de matemáticas. Geometría*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 8. Madrid. 1996.
- Mathematical Association of America. *Concursos de matemáticas. Algebra, Teoría de Números, Trigonometría*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 9 y 10. Madrid. 1996.
- AA.VV. *Competencias Matemáticas en Estados unidos*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 11. Madrid. 1996.
- GREITZER, S.L. *Olimpiadas Matemáticas I*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 2. Madrid. 1994.

- KLAMKIN, M.S *Olimpiadas Matemáticas II*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 12. Madrid. 1998.
- AA.VV. *Matemáticas Recurrentes*. Ed. Euler. Col. La tortuga de Aquiles, 13. Madrid. 1998.
- SÁNCHEZ-RUBIO, RIPOLLÉS AMELA. *Manual de matemáticas para preparación olímpica*.E. Universitat Castelló. Castelló de la Plana. 2000.
- PÉREZ FUENTES, R. *Olimpiada Matemática*. Ed autor. Utiel. 1998.
- PÉREZ FUENTES, R. *El triángulo y sus cosas*. Ed. Arpe. Utiel-Requena. 1988.
- SÁNCHEZ VÁZQUEZ, G. "Métodos gráficos de resolución de problemas geométricos". Ed Sdad. Andaluza de Educación Matemática. Thales. 1996.
- BRUÑO. *Geometría. Curso superior*. Ed. Bruño. Valencia. 1957 7ª Edició.
- ESTEBAN PIÑEIRO i altres. *Trigonometría. Ed. Síntesis*. Colección: Educación Matemática en secundaria, 20. Madrid. 1998.
- DE OLABARRIETA, L. *Apuntes de geometría y trigonometría*. Ed. El Mensajero del Corazón de Jesús. Bilbao 1942.
- GARCÍA ARDURA, M. *Problemas gráficos y numéricos de geometría*. Ed Hernando. Madrid 1963.
- GARCÍA ARDURA, M. *Ejercicios y problemas de trigonometría*. Ed Hernando. Madrid 1964.
- ROUCHÉ,E., COMBEROUSSE, CH. *Tratado de geometría elemental*. Ed.suc. Hernando. Madrid. 1915.
- CATALAN, E. *Géométrie élémentaire*. Ed. Victor Dalmont. Paris. 1858.
- PEDOE, DAN. *La geometría en el arte*. Ed. Gustavo Gili. Barcelona 1979.
- DOMÍNGUEZ, M.J. *El número de oro*. Ed. Proyecto Sur. Granada.
- DE CIURANA, J.A. *El nombre auri i l'obra de l'arquitecte Rafael Masó*. CIRIT. 1995.
- FERNÁNDEZ, i., REYES, M.E. *Geometría con el hexágono y el octógono*. Ed. Proyecto Sur. Granada. 2003.
- ZHÚKOV, A.V. El omnipresente número pi. Ed Urss, Moscou. 2005.
- Col·lecció de problemes de l'Olimpíada Argentina de Cabri*.
- REINHARDT, Fritz i SOEDER, Heinrich, *Atlas de matemáticas, 1. Fundamentos, álgebra y geometría*. Alianza atlas, 3, Alianza, 1984.
- REINHARDT, Fritz i SOEDER, Heinrich, *Atlas de matemáticas, 2. Análisis y matemática aplicada*. Alianza atlas, 12, Alianza, 1996.
- COLLETTE, J.P., *Historia de la matemáticas I* Siglo XXI, Madrid, 1985.
- COLLETTE, J.P., *Historia de la matemáticas II*. Siglo XXI, Madrid, 1985

Adreces.

<http://www.cabri.com/>

Pàgina dels autors del Cabri

<http://www.oma.org.ar/>

Olimpíada matemàtica d'Argentina. Bona col·lecció de problemes. Curs de Cabri.

<http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/>

Pàgina de Ricardo Barroso. Problemes quinzenals sobre triangles. Applets amb CabriJava.

<http://roble.pntic.mec.es/jarran2/>

Pàgina de Juan Manuel Arranz. Applets amb CabriJava.

<http://www.xtec.cat/~qcastell/ttw/ttwcat/portada.html>

Tot triangles web. Pàgina de Quim Castellsaguer sobre triangles. Macros de Cabri 2. Excel·lent.

<http://jmora7.com/>

Pàgina de José Antonio Mora. Coordenades i mecanismes amb Cabri (CabriJava). Omnipoliedre (CabriJava). La meitat del quadrat (mosaics)

<http://www.xtec.cat/~jjareno/>

Pàgina de Joan Jareño, Lloc dedicat als problemes i entreteniments matemàtics, pensant en el seu ús en educació. Presenta problemes, activitats, llibres i enllaços del mes.

<http://centros5.pntic.mec.es/ies.marques.de.santillana/matem/inddep.htm>

Pàgina de matemàtiques de l'IES "Marqués de Santillana" Colmenar Viejo, Madrid. Geometria interactiva (CabriJava, Descartes).

<http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/index.html>

Pàgina d'applets cabri creada per Genevieve Tulloue de la universitat de Nantes (França). Conté, entre d'altres coses: Còniques, Poliedres, Electricitat, Mecànica.... Una pàgina molt completa.

<http://teleline.terra.es/personal/jariasca/>

Pàgina de José María Arias. Derive, Cabri, Excel, curiositats....

http://nti.educa.rcanaria.es/matematicas/Geometria/CURSO_CABRI/INICIO.HTM

Curs de Cabri del proyecto Medusa.

<http://platea.cnice.mecd.es/~Emcarrier/>

Pàgina de Carmen Arriero Villacorta i Isabel García García. Mosaics i llocs geomètrics.

<http://www.juntadeandalucia.es/averroes/~29012064/matematicas/matematicas.htm>

Pàgina de matemàtiques de l'IES "Arroyo de Miel" Benalmádena. Málaga. Exercicis per a l'ESO.

<http://www.chronomath.com/>

Diccionari de matemàtiques en francès.

<http://faculty.evansville.edu/ck6/>

1114 teoremes sobre triangles. ENCICLOPÈDIA DELS CENTRES D'UN TRIANGLE (ETC). Pàgina de Clark Kimberling.

<http://www.xtec.cat/~voliu/mates/inici.htm>

Departament de Matemàtiques de la Bisbal. Activitats amb Cabri.

<http://www.xtec.cat/~mquerol/index.htm>

Pàgina de Manel Querol. CabriJava. Descartes. Calculadora Wiris.

<http://www.xtec.cat/~aaubanel/>

Pàgina d'Anton Aubanell Pou. Recursos materials i activitats experimentals.

<http://www.pnte.cfnavarra.es/~iesozizu/departamentos/matematicas/recursos/infos/index.html>

Pàgina de Manuel Sada. Recursos de Matemàtiques. Cabri, GeoGebra, presentacions...

<http://problemate.blogspot.com/>

Blog de Roberto Selva. Problemes de preparació per a l'Estalmat. Freqüència setmana.

<http://www.xtec.cat/recursos/mates/index.htm>

Matemàtiques de la xarxa telemàtica educativa de Catalunya.

<http://www.ricardpeiro.es>

La meua pàgina web.