

Problemes Geometria 49

1.- Siga $ABCD A'B'C'D'$ el cub d'aresta la unitat.

Siga F el punt mig de l'aresta \overline{BC} .

Siga O el centre del quadrat $CDD'C'$.

El plànol AFO talla el cub en dos sòlids.

Determineu la raó entre els volums de les dues parts.

KöMaL, C1054. Novembre 2010.

2.- Siguen a, b dos nombres reals positius.

Determineu el mínim valor de l'expressió $K = \sqrt{(x-a)^2 + b^2} + \sqrt{(x-b)^2 + a^2}$.

Per a quin valor x s'assoleix aquest mínim.

KöMaL, Gy3153. Octubre 1997.

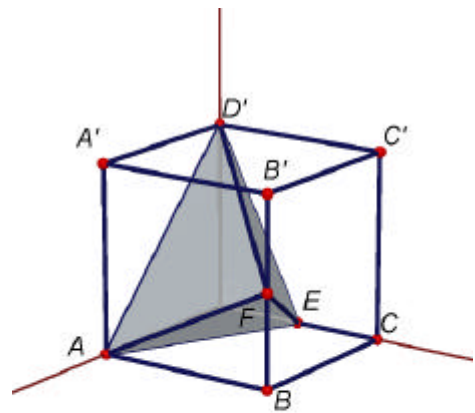
3.- Siga el cub $ABCD A'B'C'D'$.

Siga E el punt mig de l'aresta \overline{CD} .

Siga F el punt mig de l'aresta $\overline{BB'}$.

Determineu la proporció entre els volums del tetraedre $AFED'$ i el cub.

Gúsiev 852.



4.- En el cub $ABCD A'B'C'D'$ d'aresta a considerem la secció del cub formada pel plànol que passa pel punt B , el punt mig de l'aresta $\overline{AA'}$ i el centre de la cara $CC'D'D$. Calculeu el perímetre i l'àrea de la secció.

5.- En un cub d'aresta a calculeu l'àrea i el perímetre de la secció formada pel plànol que passa pel centre de dues cares laterals adjacents i pel vèrtex superior oposat a les dues cares.

Calculeu el volum de la part inferior del cub produïda per la secció anterior.

6.- La base d'un prisma oblic és un triangle equilàter de costat a .

L'aresta lateral està inclinada respecte del plànol que forma la base 60° .

Un dels vèrtexs de la base superior és projecta en el centre de la circumferència circumscripca del triangle de la base inferior.

Calculeu l'altura del prisma i les àrees de les cares laterals.

Kutepov problema 494.

7.- Siga $\triangle ABC$ un triangle circumscripca a una circumferència de radi r .

Tracem tres tangents a la circumferència paral·leles a cadascun dels costats del

triangle $\triangle ABC$, de tal forma que es generen tres triangles semblants a l'inicial.

Proveu que la mitjana geomètrica de les àrees dels tres triangles així definits i del

triangle $\triangle ABC$ és constant i independent del triangle $\triangle ABC$ escollit.

Gaceta Española 224.

8.- Sigui $\triangle ABC$ un triangle i $[ABC]$ la seva àrea. Sigui r una recta paral·lela a \overline{BC} que talla a \overline{AB} en U , a \overline{AC} en V i tal que $[ABC] = 3[AUV]$; s una recta paral·lela a \overline{AC} que talla a \overline{BC} en W , a \overline{AB} en X i tal que $[ABC] = 3[BWX]$; i t una recta paral·lela a \overline{AB} que talla a \overline{AC} en Y , a \overline{BC} en Z i tal que $[ABC] = 3[CYZ]$. Siguien $T = r \cap s$, $R = s \cap t$ i $S = t \cap r$. Demostreu que la raó entre $[TRS]/[ABC]$ és constant i determineu el seu valor.

Gaceta Española 226

9.- Siguien $\triangle ABC$ un triangle rectangle en A i D un punt sobre la recta BC distint de B i C . Siguien E i F les projeccions ortogonals de D sobre les rectes AB i AC , respectivament. Considerem a més a més els punts d'intersecció $U = AD \cap EF$, $V = BF \cap DE$ i

$W = CE \cap DF$. Proveu que el triangle $\triangle UVW$ és isòsceles, amb $\overline{UV} = \overline{UW}$, si i només si, \overline{AD} és una bisectriu traçada per A .

Gaceta Española 227

10.- En un triangle rectangle, amb les tres mitjanes es pot formar un triangle rectangle. Proveu que els dos triangles rectangles són semblants. Calculeu la raó de semblança. Calculeu els angles aguts del triangle inicial.

KöMaL, B3372, maig 2000.