Problemes Geometria 4

1.

L'apat dels rossinyols

Sobre el terreny pla d'un parc s'aixequen tres arbres, a, b i c, d'altures respectives 12, 15 i 20 metres. Els peus A, B i C d'aquests arbres es troben sobre els vèrtexs d'un triangle equilàter de 25 metres de costat. A la part més alta de cada arbre hi ha un niu de rossinyols. En Joan, que va cada dia a jugar al parc i els porta menjar, ens pregunta:

Qüestió 1: En quin punt T del terra ha de posar el menjar dels ocells per tal que T equidisti de cada niu? Quina construcció geomètrica cal que dibuixi per poder situar T?

Qüestió 2: A quina distància dels nius es troba el punt T?

Qüestió 3: Quina és la distància del punt T a cadascun dels peus de cada arbre?

Qüestió 4: Hi ha un altre arbre d que s'aixeca sobre el baricentre del triangle $\triangle ABC$, a l'extrem del qual hi ha un altre niu que dista del punt T el mateix que els altres tres nius. Quina és l'altura de l'arbre d?

2.-

Tenim un trapezi de bases paral·leles *a* i *b.*

QÜESTIÓ 1:

Pel punt d'intersecció de les diagonals d'aquest trapezi tracem un segment paral·lel a les bases. Determineu la longitud.

QÜESTIÓ 2:

Volem traçar el segment paral·lel a les bases que divideix aquest trapezi en dos trapezis de la mateixa àrea. Trobeu-ne la longitud.

QÜESTIÓ 3:

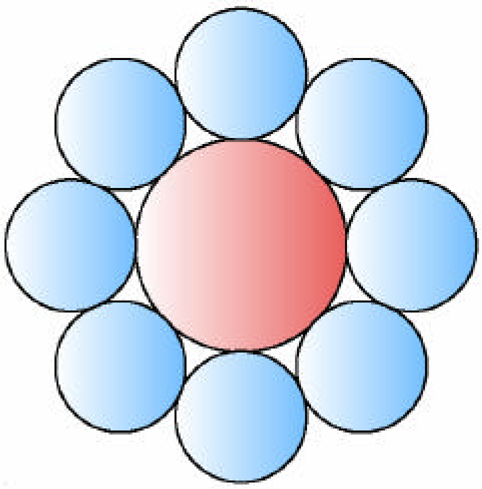
Traçar un segment paral·lel a les bases del trapezi, que divideix el trapezi inicial en dos trapezis semblants. Trobeu-ne la longitud.

QÜESTIÓ 4:

Talleu les diagonals per un segment paral·lel a les bases que determine amb aquestes diagonals tres segments iguals. Trobeu-ne la longitud (hi ha dues solucions).

3.

El joier de Vallrumí: Aaron, joier de Vallrumí, ha rebut un encàrrec molt laboriós: una agulla de pit, amb un cercle central de radi r i n cercles de radi t al seu voltant.



El seu client li ha demanat que els cercles del voltant tinguin, en total, una superfície no superior al doble de l'àrea del cercle central. (Sabem de forma confidencial que, en el cercle central, hi col·locarà un topazi que va portar del Brasil i que, en el centre de cadascun dels cercles del voltant, hi posarà un diamant. Són les pedres predilectes de la persona estimada
a qui l'ha de regalar i que, segons ens diu, encara en mereix molt

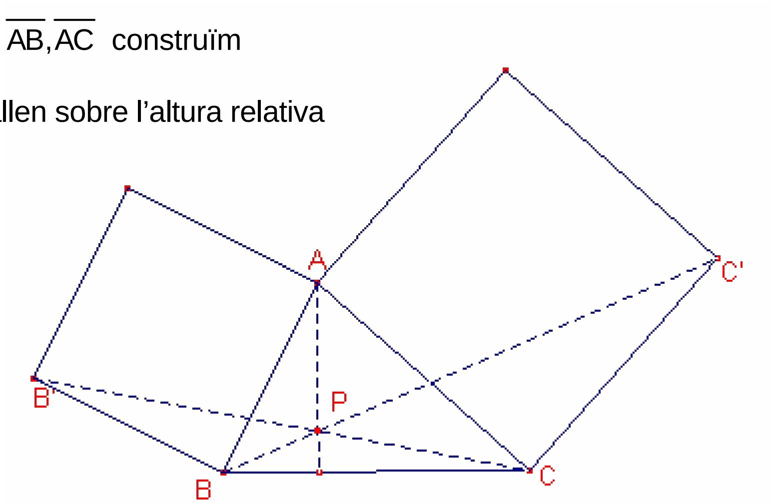
El Sr. Aaron té problemes per presentar el pressupost en funció del radi r del cercle més gran. Mai li havien fet un encàrrec com aquest. Si resolem la següent pregunta, li farem un gran servei.

Qüestió: Donat un cercle C de radi r, volem dibuixar el nombre mínim n de cercles iguals al seu voltant, de radi t, tangents entre ells i tangents al cercle C, de manera que la suma de les seves àrees no superi el doble de l'àrea del cercle C.
Doneu-nos n i t en funció de r.
Observació: la figura que hem dibuixat és només un possible croquis d'allò que es demana.
El nombre n de cercles tangents pot ser diferent de vuit.
No cal dir com el Sr. Aaron us n'estarà d'agraït!

4.
Donat un cercle C de radi r,
Qüestió 1:
Trobeu el nombre n, $n \geq 3$ més petit possible de forma que es puguen dibuixar n cercles iguals, de radi t_n tangents entre ells i tangents interiorment al cercle C, i n cercles iguals, de radi s_n, tangents entre ells i tangents exteriorment al cercle C, de manera que la suma de les àrees dels 2n cercles no supere el doble de l'àrea del cercle C. Doneu-nos t_n, s_n en funció de r.
Qüestió 2:
Fixem $r > 0$ i definim la successió de terme general $a_n = \dfrac{s_n}{t_n}$, $n \geq 3$

Calculeu el límit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

5.
Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Sobre els costats $\overline{AB}, \overline{AC}$ construïm els quadrats exteriors (veure figura).
Demostreu que les rectes B'C, BC' es tallen sobre l'altura relativa al vèrtex A.



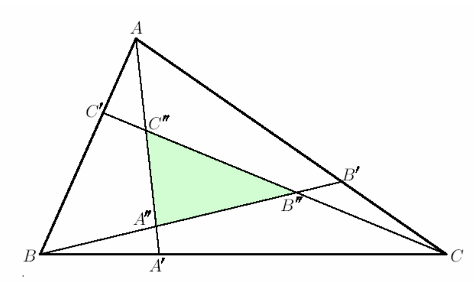
6.
Siga ABCD un rectangle de costats AB=a, i AD=b que compleixen $2b \geq a$
Siga P un punt variable del costat DC.
Siguen Q, R els peus de les respectives perpendiculars a AP des de B i D.
Qüestió 1:
Proveu que, per qualsevol posició de P, la mediatriu de QR divideix el rectangle en dues parts de la mateixa àrea.
Qüestió 2:
Trobeu la longitud de la corba descrita pel punt mig M del segment $\overline{QR}$ al variar P.
Determinem el lloc geomètric del punt M al variar P sobre el segment DC:

7.

En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ agafem els punts C', B', A' respectivament dels costats AB, AC, i BC de manera que compleixin:

$\frac{AC'}{AB} = \frac{BA'}{BC} = \frac{CB'}{CA} = r$ tal que $0 \le r \le 1$

Aleshores les rectes AA', BB', CC' es tallen tot formant el triangle $A''\overset{\Delta}{B''}C''$.



Qüestió 1:

Determineu la proporció de les àrees dels triangles $\frac{[ABC]}{[A''B''C'']}$ en funció de r.

Qüestió 2:

Si fem $r = \frac{1}{n}$ on n és enter. $n > 2$

Trobeu tots els n tals que la proporció d'àrees siga un nombre enter.

8.

Siga A el punt de tangència de dues circumferències tangents exteriors de radis R, r. Siguen B, C el punts de tangència d'una tangent comuna i externa.

a) Proveu que l'angle $\angle BAC = 90^o$

b) Proveu que el segment tangent exterior a les dues circumferències mesura $2\sqrt{Rr}$.

9.

Donat el quadrat ABCD de costat a.

Construïm una circumferència que passa pels punts A, D i que el segment de tangència del punt B a la circumferència mesura 2a.

Calculeu el radi de la circumferència.

10.

a) Demostreu que si dues mitjanes m_a, m_b d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ són perpendiculars aleshores es té que $m_c^2 = m_a^2 + m_b^2$, on m_c és l'altra mitjana.

b) Determineu la dependència dels costats d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ si les seues mitjanes $m_a = \overline{AD}, m_b = \overline{BE}$ són perpendiculars.

11. Oposicions València 2005

En un triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$, siga $\overline{AD}$ l'altura, siga $\overline{BF}$ la bisectriu i E la intersecció de $\overline{AD}$, $\overline{BF}$. Proveu que:

a) El triangle $\overset{\Delta}{AEF}$ és isòsceles.

b) $\overline{DC} > 2 \cdot \overline{EF}$.

12. Oposicions Balears 2005

Demostreu que en un triangle rectangle, la suma de les longituds de l'altura i de la bisectriu corresponents a l'angle recte és igual o menor que la longitud de la hipotenusa.

Quan s'acompleix la igualtat?.