

## Problemes Àlgebra 12

111.- Siguen a i b dos enters positius. Demostreu que l'equació  $(x-a)^2 + (x-b)^2 = 2ab - 1$  no té arrels racionals.

Oposicions Madrid 2006.

112.- Determineu totes les solucions en nombres enters de l'equació:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8.$$

Oposicions Balears 2006.

113.- Siguen a, b, c, d nombres enters qualssevol. Proveu que

$abcd(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(a^2 - d^2)(b^2 - c^2)(b^2 - d^2)(c^2 - d^2)$  és divisible per 7.

Oposicions Balears 2006.

114.- Calculeu el valor del determinant d'ordre n:

$$?_n = \begin{vmatrix} 1+x^4 & x^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x^2 & 1+x^4 & x^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 1+x^4 & x^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 1+x^4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^4 & x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x^2 & 1+x^4 \end{vmatrix}$$

Oposicions La Rioja 2006.

Calculeu el valor del determinant d'ordre n:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

Oposicions Andalusia 2006.

115.- Siga la matriu  $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  amb  $x \in \mathbb{R}$ . Siga A el conjunt de matrius

d'aquesta forma. Demostreu que A amb el producte de matrius té estructura de grup commutatiu.

Oposicions Andalusia 2006.

116.- Discutiu les arrels de l'equació  $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + m = 0$  segons els valors de m i obteniu-les.

Oposicions d'Astúries 2006.

117.- Calculeu el determinant d'ordre n:

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

118.- Siga  $0 < x_1 < y_1$  i definim per recurrència,  $x_{n+1} = \sqrt{x_n \cdot y_n}$ ,  $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ ,

$\forall n \geq 1$ .

Demostreu que ambdues successions convergeixen a un límit comú.

Oposicions Andalusia 2006.

119.- Siga  $P_3(x)$  l'espai vectorial real de polinomis amb coeficients reals, de grau menor o igual a tres amb la indeterminada  $x$ .

a) Demostreu que  $V = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$  és una base de  $P_3(x)$ .

b) Determineu, respecte de  $V$ , la matriu de l'endomorfisme  $f$  definit en  $P_3(x)$  que a cada polinomi li fa correspondre la segona derivada.

c) Calculeu el nucli i la imatge de l'endomorfisme, Així com les seues dimensions.

d) Resoleu  $f(q(x)) = 6x + 8$ , on  $q(x) \in P_3(x)$ .

Oposicions Cantàbria 2004.

120.-

a) El polinomi  $p(x) = x^n + a \cdot x^{n-m} + b$  no pot tenir arrels, distintes de zero, d'ordre superior a 2.

b) Determineu la condició a fi que el polinomi  $p(x)$  tinga una arrel doble distinta de zero.