Problemes àlgebra 13

121.- Siga M una matriu quadrada d'ordre 2 i coeficients reals, verificant la igualtat:
$M^2-2M-3I=0$ (1) on I és la matriu unitat d'ordre 2.
Siga $M_2(R)$ l'espai vectorial sobre el cos R format per totes les matrius quadrades d'ordre 2. Siga V el subespai engendrat per M i I.
a) Determineu totes les matrius que verifiquen la relació (1) i tals que la dimensió de V siga 1.
b) Determineu totes les solucions de l'equació (1) de la forma $M=\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$.
c) Es suposa que M verifica (1) i és distinta de les matrius de l'apartat a).
Determineu en V totes les matrius que verifiquen $P^2=P$.
Oposicions Cantàbria 2006.

122.- En l'espai vectorial de les matrius quadrades d'ordre 2 considerem els subespais:
$L=\left\{\begin{pmatrix} a-b+2c & b-2c \\ 0 & 2c \end{pmatrix} / \ a,b,c\in R\right\}$, $M=\left\langle\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\rangle$.
a) Determineu el subespai $L\cap M$ i comproveu que $L=L+M$ decidint, a més a més, si es tracta d'una suma directa.
b) Siga $B_L=\left\{u=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, w=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ una base de L i considerem l'aplicació $f:L\to L$ tal que $f(u)=v, f(v)=u, f(w)=w$. Determineu la matriu de f respecte de la base B_L i els subespais Ker f i Im f.
Oposicions Càceres 2002.

123.- Resoleu l'equació:
$\sin(x+y)=\sin x+\sin y$.

124.- Proveu que si $a\geq b>0$ i $\lambda>0$
Aleshores es verifica: $(\lambda+1)b^2-a^2\leq\lambda ab\leq\lambda a^2$
Quan s'assoleix la igualtat?.
Revista OIM problema 133.

125.- Demostreu que cx^2-ax+b és un divisor comú de ax^3-bx^2+c i bx^3-cx+a si divideix a un d'aquests dos polinomis.
Revista OIM problema 135.

126.- Siga p un nombre real i les arrels del polinomi $x^3+2px^2-px+10$ estan en progressió aritmètica. Determineu les arrels.

127.- Demostreu:
a) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.
b) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{1}{13}=\frac{\pi}{4}$.

128.- Si $xy+yz+zx=1$, demostreu que:

a) $\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{y}{1+y^2}+\dfrac{z}{1+z^2}=\dfrac{2}{x+y+z-xyz}$.

b) $\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{y}{1+y^2}+\dfrac{z}{1+z^2}=\dfrac{2}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}}$.

129.- Determineu la relació entre x i u si:
$x^2+y\cos^2\alpha=x\sin\alpha\cos\alpha$ i $x\cos 2\alpha+y\sin 2\alpha=0$ (es suposa que si y són no nuls).

130.- Siga x un nombre tal que $x+\dfrac{1}{x}=-1$.

Calculeu $x^{1994}+\dfrac{-1}{x^{1994}}$.

Olimpíada de Xile 1994-95.