Problemes Àlgebra 15

141.- Demostreu que no existeixen enters a, b, c, d tal que el polinomi $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) complesca $P(4) = 1$ i $P(7) = 2$.
Olimpíada espanyola 2008 fase local.

142.- Determineu el parell (x, y) de nombres tal que $xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{xy} + x + y$.

Crux Mathematicorum M353.

143.- Siguen a, b, c tres nombres reals positius. Demostreu que:
$ab(a + b - c) + bc(b + c - a) + ca(c + a - b) \geq 3abc$.
Crux Mathematicorum M361.

144.- Siguen p, q, r les arrels de l'equació $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Trobeu una equació quadràtica que les arrels siguen $p^2 + q^2 + r^2$ i $p + q + r$.
Crux Mathematicorum M366.

145.- Siguen a, b, i c tres nombres reals positius tal que $a + b + c = 6$.
Determineu el valor màxim possible de $a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}$.
Crux Mathematicorum M367.

146.- Determineu totes les ternes de nombres reals (x, y, z) tal que

$$\begin{cases} x^{2008} + y^{2008} + z^{2008} = 3 \\ x^{2009} + y^{2009} + z^{2009} = 3 \\ x^{2010} + y^{2010} + z^{2010} = 3 \end{cases}$$

Gaceta matemática 120.

147.- Siguen a, b, c nombres reals. Demostreu que
$V = 4\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - \left((a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2\right)$ és sempre no negatiu i determineu tots els valors de a, b, c per als quals $V = 0$.
Duel Matemàtic R. Txeca, Polònia, Àustria, 2008.

148.- Determineu totes les solucions reals del sistema d'equacions
$\frac{1}{x^2} + \frac{4}{y^2} + \frac{9}{z^2} = 4$; $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $xyz = \frac{9}{2}$.
Crux Mathematicorum M375.

149.- Siguen a, b, c tres nombres positius tal que $abc = 1$. Proveu que
$2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + a + b + c \geq 6 + ab + bc + ca$.
Excalibur 12, 2.

150.- Si a, b, c son nombres reals positius proveu:

a) $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq a + b + c$.

b) $\frac{a^3}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{c^6}{6} \geq abc$.