Problemes d'àlgebra 21

201.- Existeixen nombres reals x, y tal que $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=x+y$.
Crux C98. Desembre 2015.

202.- Siga $A, B \in M_n(R)$ tal que $\det A = \det B \neq 0$.
Si $a, b \in R \sim \{0\}$ proveu que:
$\det\left(aA + bB^{-1}\right) = \det\left(aB + bA^{-1}\right)$.
Crux 3901.

203.- Siguen a, b, i c nombres reals positius tal que $a^2+b^2+c^2=1$. Demostreu que
$\sqrt{(ab)^{2/3}+(bc)^{2/3}+(ac)^{2/3}} < \dfrac{2+\sqrt{3}}{3}$.
Crux 3918.

204.- Resoleu l'equació $\left(3\sqrt{3}\right)^n - \left(2\sqrt{2}\right)^n = 2^n + 3^n + \left(\sqrt{6}\right)^n$ en els nombre enters positius.
KöMaL, C1292.

205.- Resoleu el sistema $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$.
KöMaL, B4709.

206.- Determineu tots els parells de polinomis $f(x)$, $g(x)$ amb coeficients reals tal que
$x^2 \cdot g(x) = f(g(x))$.
Crux OC199.

207.- Siguen x_1, x_2 tres nombres reals positius, demostreu que
$(x_1+x_2+1)\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+1\right) \geq 9$.
KöMaL, C1301.

208.- Siguen a, b, c tres nombres estrictament positius que sumen 18.
Demostreu que
$\dfrac{a}{b^2+36}+\dfrac{b}{c^2+36}+\dfrac{c}{a^2+36} \geq \dfrac{1}{4}$.
Crux Mathematicorum 3985

209.- Siguen a, b, c nombres reals positius tals que $a+b+c=1$.
Demostreu que $a^4+b^4+c^4 \geq abc$.
Crux Mathematicorum 3994.

210.- Siguen a, b, c nombres reals positius tal que el seu producte siga 8.
Proveu que:

$$\frac{a^4+b^4}{c^3}+\frac{a^4+c^4}{b^3}+\frac{b^4+c^4}{a^3}\geq 64\left(\frac{1}{a^5}+\frac{1}{b^5}+\frac{1}{c^5}\right)+6\,.$$

Crux Mathematicorum 3997.