

Problemes Àlgebra 23

221.- Resoleu la inequació

$$\sqrt{4x^2 - 8x + 5} + \sqrt{3x^2 + 12x + 16} \geq 6\sqrt{x} - x - 6.$$

Crux Mathematicorum 3954.

222.- a) Demostreu que $4^{\cos t} + 4^{\sin t} \geq 5$ per a tot $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

b) Demostreu que $6^{\cos t} + 6^{\sin t} \geq 7$ per a tot $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Crux Mathematicorum 4030.

223.- Determineu el valor del paràmetre a a fi que l'equació $x^3 - a = \sqrt[3]{x+a}$ tinga només dues solucions.

KöMaL, C1342.

224.- Siguen a, b, c nombres reals positius tals que $a + b + c = 3$.

Demostreu que

$$\frac{a^2}{a + \sqrt[3]{bc}} + \frac{b^2}{b + \sqrt[3]{ca}} + \frac{c^2}{c + \sqrt[3]{ab}} \geq \frac{3}{2}.$$

Determineu quan s'assoleix la igualtat.

Crux Mathematicorum OC238.

225.- Resoleu el sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \\ \frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy} = \left(\frac{7}{6}\right)^2 \\ \frac{1}{x^2y^2} + \frac{1}{y^2z^2} + \frac{1}{z^2x^2} = \left(\frac{7}{36}\right)^2 \end{cases}.$$

Olimpiada Catalana 2016. Fase local.

226.- Un grup d'estudiants ha decidit comprar un regal d'un valor des de 170€ fins 195€. Però en el darrer moment dos estudiants es negaren a participar en la compra cadascun dels restants ha tingut que donar 1€ més. Quant va costat el regal.

227.-

Proveu que si $a, b, c > 0$ i $ab + ac + bc = 2016$,

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{c}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{a}\right)^2 \geq \frac{2019^2}{2016}.$$

Crux Mathematicorum 4066.

228.- Siguen a, b, c, d reals tals que $0 < a < b < c < d$.

Demostreu que $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} > 3 + \ln \frac{d}{a}$.

Crux Mathematicorum 4089.

229.- En una progressió aritmètica de 15 termes a_1, a_2, \dots, a_{15} sabem que la suma dels 15 termes és igual al doble de la suma dels primers 10 termes.

Si d és la diferència de la progressió, calculeu $\frac{d}{a_1}$.

Olimpíada Argentina 2016. Intercolegial. Nivel 3.

230.- Resoleu el sistema
$$\begin{cases} 3x^2 + xy - 2y^2 = -5 \\ x^2 + 2xy + y^2 = 1 \end{cases}.$$