

Problemes Àlgebra 24

231.- Determineu les matrius $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ tal que:

$$\begin{cases} A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 22 & 44 \\ 14 & 28 \end{pmatrix} \\ AB + BA = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Crux Mathematicorum 4081.

232.- Siguen p, q, r tres nombres reals tals que $p + q + r = 26$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 31$

Calculeu $\frac{p}{q} + \frac{q}{r} + \frac{r}{p} + \frac{q}{p} + \frac{r}{q} + \frac{p}{r}$.

233.- a) Determineu els dos valors de x que verifiquen $x^2 - 4x - 12 = 0$.

b) Determineu el valor de x que verifica $x - \sqrt{4x + 12} = 0$. Justifiqueu la resposta.

c) Determineu tots els valors reals de c per al quals l'equació

$$x^2 - 4x - c - \sqrt{8x^2 - 32x - 8c} = 0 \text{ admet exactament dues arrels reals distintes.}$$

Crux Mathematicorum CC209.

234.- Resoleu el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ xyz = 2(xy + yz + zx) \end{cases}.$$

KöMaL, B4805.

235.- Siguen a, b, c nombres reals positius tals que $a + b + c = 3$.

Determineu el valor mínim de l'expressió:

$$a^2(a^2 - a + 1) + b^2(b^2 - b + 1) + c^2(c^2 - c + 1)$$

Crux Mathematicorum 4116

236.- Determineu els parells (c, d) tal que l'equació $x^3 - 8x^2 + cx + d = 0$ té tres arrels (no necessàriament distintes) enteres positives.

237.- Resoleu l'equació

$$(x^2 + y^2)^3 = (x^3 - y^3)^2.$$

238.- Siga $a = x + \frac{1}{x}$, $b = y + \frac{1}{y}$, $c = xy + \frac{1}{xy}$.

Proveu que $a^2 + b^2 + c^2 - abc$ no depèn de x i y .

239.- Resoleu l'equació trigonomètrica:

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x}.$$

240.- Si x i y són nombres enters no negatius proveu que $\sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{y}{2}} \leq \sqrt{x+y}$.