Problema Àlgebra 6

51.- Resoleu l'equació $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$. Oposicions Catalunya 2000.

52.- Calculeu la potència n-èsima de la matriu: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (Oposicions Catalunya 2000)

53.- Demostreu que en l'equació $x^2 + y^2 = z^2$ x i y no poden ser imparells.
Oposicions Catalunya 1999.

54.- Determineu els nombres reals b, c sabent que les solucions de l'equació $x^3 + bx^2 + cx = 0$ estan en progressió aritmètica.

55.- Resoleu l'equació $2x^3 - 9x^2 + 32x + 75 = 0$ sabent que admet una arrel complexa (no real) de mòdul 5. Oposicions Catalunya 2000.

56.- Donat un nombre natural k, considerem la successió:
$a_1 = \sqrt{k}$, $a_2 = \sqrt{k + \sqrt{k}}$, $a_3 = \sqrt{k + \sqrt{k + \sqrt{k}}}$,.........
Demostreu que a_n és convergent.
Calculeu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l(k)$, indiqueu quina condició compleixen els valors de k per als quals l(k) és enter. Oposicions Catalunya 1993.

57.- Siguen dues successions de nombres enters $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ tal que $\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1} = a_n + b_n\sqrt{2}$.
a) Demostreu que $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ són successions de nombres senars.
b) Demostreu que $\{b_n\}$ és la hipotenusa d'un triangle de catets $\dfrac{a_n+1}{2}$, $\dfrac{a_n-1}{2}$.
Oposicions Catalunya 2000.

58.- Considerem la successió de Fibonacci $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ $n \geq 2$.
Demostreu que es compleixen les següents relacions:
a) $a_{n+2} = 1 + a_1 + a_2 + \ldots\ldots.. + a_n$.
b) $a_n \cdot a_{n+1} = a_1^{\;2} + a_2^{\;2} + \ldots\ldots\ldots. + a_n^{\;2}$
c) $a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2} + (-1)^n$
Oposicions Catalunya 1993.

59.- Siga $0 < x_1 < y_1$ i definim per recurrència, $x_{n+1} = \dfrac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$.
a) Demostreu que $x_1 < x_2 < \ldots\ldots.. < x_n < y_n < \ldots\ldots.. < y_2 < y_1$.
b) Demostreu que ambdues successions convergeixen a un límit comú i calculeu-lo.
Oposicions Catalunya 1993.

60.- Resoleu el següent sistema d'equacions segons els valors de a:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ xy + yz + xz = a^2 \\ xyz = a^3 \end{cases}.$$