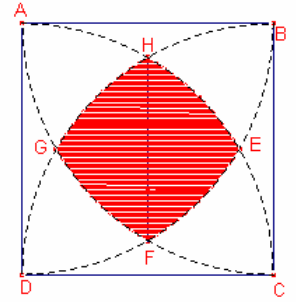


## Problemes Anàlisi3



21.-

Els punts A, B, C, D són els vèrtexs d'un quadrat de costat  $\overline{AB} = 1$ . Amb centres els vèrtexs i radis iguals a 1 dibuixem 4 circumferències. La intersecció de les 4 circumferències determinen un quadrilàter curvilini EFGH. Determineu l'àrea del quadrilàter:

22.- Proveu que

$\sin^2(x + \alpha) + \sin^2(x + \beta) - 2\cos(\alpha - \beta)\sin(x + \alpha)\sin(x + \beta)$  és constant per a tot  $x$ .

23.- Determineu totes les funcions tals que  $\frac{1}{x}f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ , per a tot  $x \neq 0$ .

24.- Siga una funció  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua tal que:

$f(1000) = 999$ .  $f(x) \cdot f(f(x)) = 1$ , per a tot  $x \in \mathbb{R}$ .

Determineu  $f(500)$ . (Olimpíada Polònia).

25.-

a) Si  $x > 1$  proveu que  $\ln(x) > \frac{3(x^2 - 1)}{x^2 + 4x + 1}$ .

b) Si  $a > b > 0$ , proveu que  $\frac{a - b}{\ln(a) - \ln(b)} < \frac{1}{3} \left( 2\sqrt{ab} + \frac{a + b}{2} \right)$ .

26.- Siga la successió definida per  $u_1 = a$ ,  $u_2 = b$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1})$ ,  $n \geq 2$ .

a) Proveu que existeix  $\lim_{x \rightarrow \infty} u_n$ .

b) Calculeu el  $\lim_{x \rightarrow \infty} u_n$  en funció de a i b.

27.- Siga  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funció derivable en  $\mathbb{R}$  tal que  $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x)$ .

Proveu que  $f(x) = f'(0)x$ .

28.- Determineu les funcions  $u(x)$  que satisfan  $u(x) = x + \int_0^{\frac{1}{2}} u(t) dt$ .

29.- Calculeu els termes generals de les següents successions recurrents:

a)  $a_{n+2} = 5 \cdot a_{n+1} - 6 \cdot a_n$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$ .

b)  $b_{n+2} = 6 \cdot b_{n+1} - 9 \cdot b_n$ ,  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 3$ .

30.- Calculeu el terme general de la següent successió recurrent:

$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2} + 1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$ .