

Problemes Anàlisi 4

31.-

- a) Determineu la funció $f(x)$ si $f(x+1) = x^2 + 2x + 2$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.
- b) Determineu la funció $g(x)$ si $g\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ per a tot $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- c) Determineu la funció $h(x)$ si $h(x+2) + h(x+1) = 2x + 3$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.

32.- Un dipòsit cilíndric d'altura h i radi R , amb $R < h < 2R$ està ple d'aigua.

S'introdueix en el dipòsit una esfera de radi r més densa que l'aigua.

- a) Obteniu la funció que expressa el volum d'aigua que es vessarà en funció de r .
- b) Feu un dibuix (esborrany) de la funció on s'indiqui creixement, punts singulars, asímptotes,...
- c) Estudieu la continuïtat de la funció.
- d) Determineu, si existeix el valor de r per al qual siga més gran el volum d'aigua

vessada. $V_{\text{casquet esfèric}} = \pi a^2 \left(r - \frac{a}{3} \right)$ on a és l'altura del casquet i r el radi de l'esfera.

33.- Siguen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua i k un nombre real tals que:

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{x}{2} (f(x) + k), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- a) Proveu que $f(0) = k$
- b) Proveu que les úniques funcions contínues que satisfan la relació de l'enunciat són les funcions del tipus $f(x) = cx + k$.

34.- Determineu les funcions $f(x)$ tal que $[f(x)]^2 \cdot f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x$ per a tot x distints de $-1, 0, 1$.

35.- Calculeu el següent límit raonadament: $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2x} \frac{\sin t}{t} dt}{x^3}$.

36.- Calculeu el següent límit: $L = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{e^x - e}{\ln x} \right)^{g(x)}$, on $g(x) = \frac{1}{e^x - 1}$

37.- Siga la successió recurrent $a_{n+4} + a_{n+3} + a_{n+2} + a_{n+1} + a_n = 12n$,
 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$.

- a) Determineu el terme general. b) Calculeu a_{90} .

38.- Siga la funció $f(x)$ amb derivada contínua en l'interval $I = [a, b]$.

Siga $f(a) = 0$ i $0 \leq f'(x) \leq 1$, per a tot $x \in I$. Demostreu que:

a) $[f(x)]^2 \leq 2 \int_a^b f(x) dx$, per a tot $x \in I$. b) $\int_a^b [f(x)]^3 dx \leq \left[\int_a^b f(x) dx \right]^2$.

39.- Determineu la funció derivable $f(x)$ derivable en $[0, 2]$ que verifiqui l'equació:

$$3 \int_0^x f(t) dt = [f(x) + 2f(0)]x \text{ i tal que } f(1) = 1, f(2) = 7.$$

40.- Determineu els valors màxim i mínim de la funció $f(x) = 3 \sin 5x + 7 \cos 5x$.