

Problemes Anàlisi 5

41.- Demostreu que per a tot $x \geq 0$ s'acompleix la desigualtat $x^2 - x^3 < \frac{1}{6}$.

42.- Siga la successió $\{a_n\}$ definida per $12a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

a) Determineu el terme general.

b) Calculeu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

c) Calculeu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

43.- Siguen a i b nombres reals $a < b$ i $f(x)$ una funció real contínua en $[a, b]$ i derivable en $]a, b[$ que compleix $f(a) = f(b)$.

Proveu que per a cada nombre natural $n \geq 1$ existeixen nombres reals distints $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tals que:

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + \dots + f'(\xi_n) = 0.$$

(Oposicions Balears 2005).

44.-

a) Proveu que $2 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{x}} + \arcsin(2x-1) = \frac{\pi}{2}$.

b) Proveu que $2 \operatorname{arctg}(x) + \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \pi$, $x \geq 1$.

45.-

a) Proveu que $\frac{-1}{2} \leq \cos x \cdot \sin x \leq \frac{1}{2}$.

b) Proveu que $(2 + \sin x)^2(x + \sin x \cdot \cos x) - x + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

46.- Determineu l'angle entre les gràfiques de les funcions $f(x) = \sqrt{2x}$, $g(x) = \frac{x^2}{2}$ en el punt de la intersecció d'ambdues gràfiques d'abscissa positiva.

47.- Determineu el lloc geomètric dels vèrtexs dels angles rectes, els costats dels quals són tangents a la funció $y = \frac{1}{4}x^2$.

48.- Factoritzeu l'expressió: $xy(x-y) + yz(y-z) + xz(z-x)$.

49.- Demostreu que $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$ quan $x \geq 0$.

50.- Siguen els nombres reals positius a, b, c, d. Demostreu que:

$$\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^{a+b} \leq \left(\frac{a}{c}\right)^a \left(\frac{b}{d}\right)^b.$$