

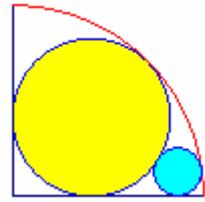
Problemes de geometria 14

1.- Una circumferència de centre C està inscrita en un quadrant de circumferència de centre O.

Una altra circumferència, de centre Q, és exterior, i tangent, a la circumferència de centre C i interior, i tangent a un dels radis i a l'arc, al quadrant.

Si P és el peu de la perpendicular des de Q a la línia de centres OC, proveu que $\overline{OQ} + \overline{QP} = 2 \cdot \overline{OP}$.

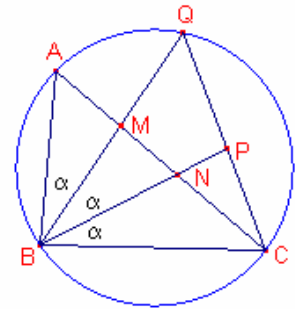
Oposicions Balears 2006.



2.- Donat el triangle $\triangle ABC$. Siguen les circumferències C_1, C_2 que passen pels punts B, C i intersecten els costats $\overline{AB}, \overline{AC}$ en els punts B', C' (la circumferència C_1) i en els punts B'', C'' (la circumferència C_2). Proveu que els segments $\overline{B'C'}$ i $\overline{B''C''}$ són paral·lels.

3.- Mitjançant un segment, volem tallar un triangle rectangle isòsceles T, de catets unitaris, en dos polígons que tinguin la mateixa àrea. Trobeu els extrems i la longitud del segment de longitud mínima que divideix el triangle T en dos polígons de la mateixa àrea. Aquest segment, és únic?.

4.- En la figura següent proveu que $\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} + \frac{\overline{CP}}{\overline{CQ}} = 1$.



5.- Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$. Siguen P, Q, R els punts simètrics de A, B, C respecte $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ respectivament.

Calculeu la raó entre les àrees dels triangles $\triangle ABC, \triangle PQR$.

6.- Siga ABCDEFG un heptàgon regular. Proveu que $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$.

7.- Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$. Siguen D i E punts dels costats \overline{AC} i \overline{BD} respectivament, tals que \overline{AE} i \overline{BC} són perpendiculars i $\overline{BD} = \overline{DC} = \overline{EC} = 1$. Determineu la longitud del costat \overline{AC} .

8.- Entre quins valors pot estar la distància entre l'incentre i el baricentre d'un triangle rectangle d'hipotenusa a. Shariguin I159.

9.- Proveu que els costats d'un triangle tal que el cercle inscrit talla una de les mitjanes en tres parts iguals són proporcionals a 5, 10 i 13.

10.- Siguen a, b, c els costats d'un triangle de semiperímetre p i R el radi de la circumferència circumscrita. Demostreu que $\frac{a^3}{\sin A} + \frac{b^3}{\sin B} + \frac{c^3}{\sin C} \geq \frac{8Rp^2}{3}$.