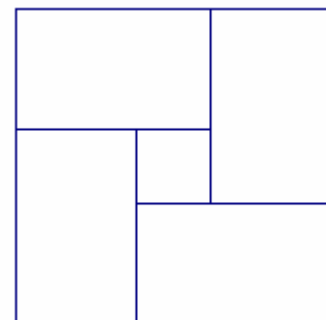


1.- Ens donen una circumferència c de centre O i un punt fix F . Es tracta de trobar un punt P sobre la recta FO de manera que, si T és el punt de tangència d'una de les rectes tangents traçades des de P a c , aleshores $\overline{PF} = \overline{PT}$.

2.- Siguen 4 rectangles iguals i un quadrat formen un altre quadrat (veure figura).
L'àrea del quadrat gran és S i l'àrea del quadrat menut és Q . La proporció entre les àrees dels dos quadrats és $\frac{S}{Q} = 9 + 4\sqrt{5}$.
Calculeu la proporció dels costats dels rectangles.



3.- Siga un rectangle $ABCD$ tal que $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{BC}$. A l'exterior del

rectangle dibuixem el triangle $\triangle DCF$. Tal que l'angle $\angle DFC = 30^\circ$ i els punts A, D, F estan alineats.

Siga E el punt mig del costat \overline{AD} . Calculeu la mesura de l'angle $\angle EBF$.

4.- Donada una semicircumferència de diàmetre $\overline{AB} = 2R$, es considera una corda \overline{CD} de longitud constant. Siga E la intersecció de AC amb BD i F la intersecció de AD amb BC .

Proveu que el segment \overline{EF} té longitud constant i direcció constant al variar la corda \overline{CD} sobre la semicircumferència.
Olimpíada espanyola 2007.

5.- Siga O el circumcentre del triangle $\triangle ABC$. La bisectriu de l'angle A talla el costat oposat en el punt P . Demostreu que:

$$\overline{AP}^2 + \overline{OA}^2 - \overline{OP}^2 = bc.$$

6.- Siga $ABCDEFGH$ un octògon regular de radi 1. Demostreu que $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AC}$

7.- Com s'aprecia en el diagrama, en un prisma quadrangular:

$$ABCD - A_1B_1C_1D_1, \overline{AB} = \overline{AD} = 2, \overline{DC} = 2\sqrt{3}$$

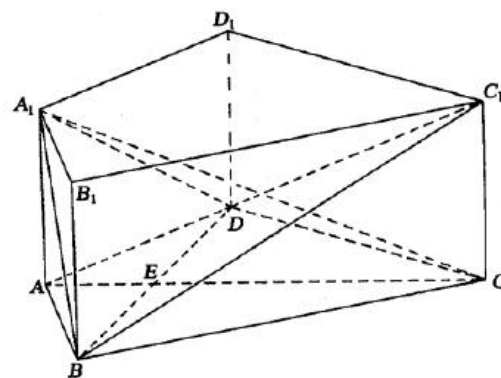
$\overline{AA_1} = \sqrt{3}, \overline{AD} \perp \overline{DC}, \overline{AC} \perp \overline{BD}$ i el peu de la perpendicular és E .

i) Proveu que $\overline{BD} \perp \overline{A_1C}$.

ii) Determineu l'angle entre els plànols A_1BD, BC_1D .

iii) Determineu l'angle format per les rectes AD i BC_1 que estan en plànols diferents.

Problema selectivitat xinesa.



8.- Per un punt qualsevol I interior del triangle $\triangle ABC$

tracem el segment \overline{PQ} paral·lel a \overline{AB} , el segment \overline{RS}

paral·lel a \overline{BC} i \overline{TU} paral·lel a \overline{AC} (P, S en \overline{AC} , T, Q en \overline{BC} ; U, R en \overline{AB}). Proveu que:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{RS}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{TU}}{\overline{AC}} = 2.$$

9.- Una recta paral·lela a la recta tangent en A a la circumferència circumscrita al triangle $\triangle ABC$ intersecta els costats \overline{AB} i \overline{AC} en els punts D i E respectivament. Sabent que $\overline{AD} = 6$, $\overline{AE} = 5$ i $\overline{EC} = 7$. Determineu la mesura de \overline{BD} .

10.- El quadrat ABCD té costats de longituds, un cercle de centre E té radi r. El cercle passa pel punt D i D està sobre el segment \overline{BE} . El punt F està sobre el cercle, en el mateix costat de BE com A. El segment \overline{AF} és tangent al cercle i $\overline{AF} = 2r$. Calculeu la proporció $\frac{r}{s}$.

