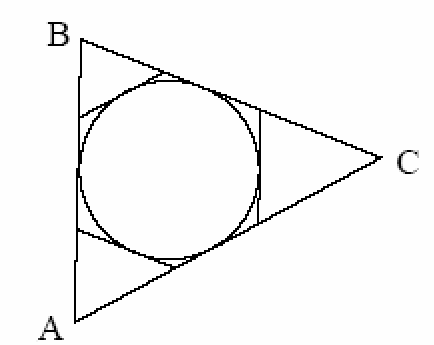
Problemes de Geometria 1

1. Determineu les longituds dels costats de tots els triangles rectangles amb costats de longitud entera, als quals es pot inscriure un cercle de radi 6.

2.-
a) Demostreu que el nombre de cares d'un políedre convex que tenen un nombre imparell de costats és parell.
b) Demostreu que la suma dels angles de totes les cares d'un políedre convex és $n \cdot 360^{o}$ amb n enter.

3.- En un triangle, el radi de la circumferència circumscrita és R. Es tracen tres rectes tangents a la circumferència inscrita i paral·leles als costats, que formen tres triangles més petits en els vèrtex del triangle com es veu a la figura.



Si els radis de les circumferències circumscrites dels tres triangles petits són R_A, R_B, R_C, demostreu que $R = R_A + R_B + R_C$

4.- Un tetràedre compleix que, per a cada vèrtex, la suma dels cosinus dels angles díedres de les tres arestes adjacents és 1. Demostreu que els díedres d'arestes oposades són iguals.

5.- Hi ha dos triangles rectangles no semblants, cada un dels quals té un costat igual al costat d'un triangle equilàter i l'àrea α vegades l'àrea d'aquest triangle equilàter. Què podem dir del nombre α.

6.- Un dipòsit cònic amb el vèrtex a la part inferior, d'altura h i angle en el vèrtex $2\alpha < \pi$, és ple d'aigua fins a vessar. S'introdueix al dipòsit, amb compte, una esfera de radi r més densa que l'aigua. Dibuixeu la gràfica de la funció que expressa, en funció de $r > 0$, el volum d'aigua que es vessarà. En particular, determineu el valor de r per al qual serà més gran el mullader.
Nota: El volum d'un casquet esfèric (cada una de les parts en què un pla divideix una esfera és igual a $\pi a^2\left(r - \frac{a}{3}\right)$ on r és el radi de l'esfera i a l'altura del casquet $(0 \le a \le 2r)$.

7.- Un rectangle de costats 20cm i 15cm té un vèrtex situat en el centre d'un circumferència i el vèrtex oposat situat sobre la circumferència. Calculeu la longitud de la corda que passa pels altres dos vèrtex del rectangle.

8.-
a) Demostreu que, en qualsevol triangle, el perímetre del triangle, P, l'àrea del triangle, A i el radi R del cercle inscrit satisfan, $RP = 2A$.
b) D'entre tots els triangles de base 1 i altura 1, determineu quin té el cercle inscrit d'àrea màxima i calculeu l'àrea d'aquest cercle.

9.- Esbrineu per a quins punts de l'eix d'una paràbola es poden traçar el màxim nombre possible de normals a la paràbola. Comproveu que la distància d'aquests punts al vèrtex és més gran que la distància d'aquests punts als peus de les altres normals.

10.- Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangle.
a) Determineu els punts P del pla que compleixen:
$\text{àrea}(PAB) = \text{àrea}(PBC) = \text{àrea}(PCA)$ (1)
b) Siga P un punt interior del triangle que compleix (1), siguen P_1, P_2, P_3 els punts interiors als triangles $\overset{\Delta}{PBC}, \overset{\Delta}{PCA}, \overset{\Delta}{PAB}$ en les mateixes condicions. Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{P_1P_2P_3}$ en funció de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

11.- Trobeu el centre i el radi de la circumferència que intercepta sobre cada costat d'un triangle donat segments iguals al radi.

12. Donat un segment $\overline{AB}$ de longitud 8m, trobeu el lloc geomètric dels baricentres dels triangles de base $\overline{AB}$, els perímetres dels quals amida 18m.

13.- Comproveu que la suma de distàncies dels dos extrems d'un diàmetre d'una circumferència a una tangent qualsevol de la circumferència és constant.