

### Problemes de Geometria 23

1.- L'altura d'un triangle rectangle sobre la hipotenusa és  $h$ . Demostreu que els vèrtexs dels angles aguts i les projeccions del peu de l'altura sobre els catets estan en una circumferència. Determineu la longitud de la corda de circumferència tallada per l'altura i els segments d'aquesta corda, en els quals la divideix la hipotenusa.  
Shariguin I295.

2.- La raó entre el radi de la circumferència circumscrita i el radi de la inscrita a un trapezi és igual a  $k$ . Determineu l'angle agut del trapezi.  
Gúsiev 188

3.- La corda comuna de dues circumferències secants és el diàmetre d'una d'elles. Per un dels extrems d'aquest diàmetre es tracen tangents a les dues circumferències. Demostreu que l'altre extrem del diàmetre i els punts migs dels segments de les tangents que tallen les circumferències són els vèrtexs d'un triangle rectangle.  
Gúsiev 490.

4.- En una circumferència  $c$  donada, hi inscrivim un quadrilàter  $q$ , les diagonals del qual són perpendiculars.

QÜESTIÓ 1:

Proveu que, siga quin siga el quadrilàter inscrit de diagonals perpendiculars, la suma dels quadrats de dos costats oposats és un valor constant.

QÜESTIÓ 2:

Interpreteu geomètricament el valor d'aquesta constant.

Xtec gener 2009

5.- Siga  $ABCD$  un tetràedre amb tres arestes perpendiculars dos a dos en el vèrtex  $D$ . Siga  $O$  el centre de la seua esfera circumscrita. Proveu que el baricentre  $T$  de la cara  $ABC$  pertany a la recta  $RO$ .

Duel Matemàtic R. Txeca, Polònia, Àustria, 2008.

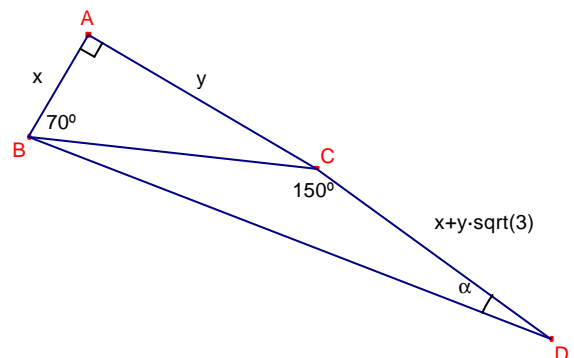
6.- L'ortocentre  $H$  d'un triangle acutangle  $\triangle ABC$  es transforma en els punts  $A_1, B_1, C_1$  amb les simetries axials els eixos de les quals són els costats  $a, b, c$ , respectivament. Si  $\angle C_1AB_1 = \angle CA_1B$ ,  $\angle A_1BC_1 = \angle AB_1C$ ,  $\angle B_1CA_1 = \angle BC_1A$ , proveu que el triangle és equilàter.

7.- En el sector d'una circumferència de radi  $R$  s'ha inscrit una circumferència de radi  $r$ .

La corda del sector mesura  $2a$ . Demostreu que  $\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{a}$ .

Lidski 387.

8.- Donat el triangle rectangle  $\triangle ABC$ ,  $A = 90^\circ$ ,  $\overline{AB} = x$ ,  $\overline{AC} = y$ , es construeix el triangle  $\triangle BCD$  tal que  $\angle BCD = 150^\circ$ ,  $\overline{CD} = x + \sqrt{3}y$ . Calculeu la mesura de l'angle  $\angle BDC$ .



9.- Des d'un punt  $P$  exterior a una circumferència es tracen dues rectes que generen dues cordes  $\overline{AB}$ ,  $\overline{CD}$  de longituds 10 i 7 unitats respectivament. Sabent que les dues rectes formen un angle de  $60^\circ$  i que la distància de  $P$  a  $B$  és de 8 unitats, calculeu el radi de la circumferència.

Oposicions València 2008

10.- Siga  $P$  un punt qualsevol de la circumferència  $C_1$  inscrita a un quadrat de costat 2a. Anomenem  $\alpha$  i  $\beta$  els angles respectius sota els quals el punt  $P$  veu cadascuna de les dues diagonals del quadrat.

Demostreu que, en variar el punt  $P$  sobre la circumferència  $c$ , la quantitat  $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta$  es manté constant i trobeu el valor d'aquesta quantitat.

Xtec Juny de 2009.