Problemes de Geometria 2

1.- Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$. Siga P un punt en l'arc menor $\overset{\frown}{BC}$ de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. El segment $\overline{AP}$ talla en el punt D el costat $\overline{BC}$

Proveu que $\frac{1}{\overline{PD}} = \frac{1}{\overline{PB}} + \frac{1}{\overline{PC}}$.

2.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Siga D un punt del costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{CD} = 2 \cdot \overline{BD}$ i siga E un punt del costat $\overline{AC}$ tal que $\overline{AE} = \frac{3}{2}\overline{CE}$. Si l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CED}$ és $8cm^2$, calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

3.- En un triangle qualsevol $\overset{\Delta}{ABC}$ $r \cdot r_a \leq \frac{a^2}{4}$ on r és en radi de la circumferència inscrita i r_a és en radi de la circumferència exinscrita tangent al costat a.

4.- Siga el triangle acutangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = 10cm$, $\overline{AC} = 14cm$. Siguen $\overline{AH}$ altura, $\overline{AV}$ bisectriu, $\overline{AM}$ mitjana, tal que $\overline{HV} = \overline{MV}$. Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

5.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Si $\angle CAM + \angle MCB = 90^o$, aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle o isòsceles.

6.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$. Siga D el punt mig del costat $\overline{BC}$.
Siga F el punt mig de $\overline{AB}$, E el punt mig de $\overline{AF}$, G el punt mig de $\overline{FB}$.
Siga P la intersecció de $\overline{AD}$ i $\overline{CE}$. Siga Q la intersecció de $\overline{AD}$ i $\overline{CF}$. Siga R la intersecció de $\overline{AD}$ i $\overline{CG}$. Calculeu la raó $\frac{\overline{PQ}}{\overline{QR}}$.

7.- Siga el triangle acutangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Siguen $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ les altures del triangle. Siga H l'ortocentre. Demostreu que $\frac{\overline{AH}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BH}}{\overline{BE}} + \frac{\overline{CH}}{\overline{CF}} = 2$.

8.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$. Siguen $\overline{BD}, \overline{CE}$ bisectrius. Siga I l'incentre.

Determineu la relació entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{IBC}$ i del quadrilàter BCDE.

9.- Calculeu la raó entre les àrees d'un triangle i el triangle format per les seues mitjanes.

10.- En un triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90º$, siga $\overline{AD}$ l'altura sobre la hipotenusa. Siga I_1 l'incentre del triangle $\overset{\Delta}{ADC}$, I_2 l'incentre del triangle $\overset{\Delta}{ADB}$. Calculeu els angles del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ si la suma de les distàncies de I_1, I_2 a l'altura $\overline{AD}$ és igual a $\frac{a}{4}$.

11.- En qualsevol triangle $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{abc}{8}$ essent vàlida la igualtat quan el triangle és equilàter. A més a més, $0 < \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$.

12.- En un triangle isósceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = \overline{AC}$, siga $\overline{BD}$ la bisectriu tal que
$\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{AD}$.
Calculeu l'angle A. (Problema resolt en Crux Mathematicorum).

13.- Els quadrats dels costats d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ són proporcionals a 1, 2, 3. Demostreu que el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i el triangle format per les mitjanes són semblants i que els angles formats per les mitjanes són iguals als angles del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

14.- Si en un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ la mitjana $m_a = \frac{b\sqrt{3}}{2}$ i la bisectriu $v_c = \frac{c\sqrt{3}}{2}$ aleshores el triangle és equilàter.