Problemes geometria 3

1.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Si $\cos(3A)+\cos(3B)+\cos(3C)=1$ aleshores un dels angles és igual a 120º.

2.- Donat el triangle $\overset{\Delta}{OAB}$ construïm el triangle que generen els extrems dels vectors $r\cdot\vec{OB},\ s\cdot\vec{AB},\ t\cdot\vec{OA}$.
Determineu que la raó entre les àrees del triangle inicial i el nou triangle és

$$\frac{1}{|s(t-r)-tr-r|}$$

3.-
a) Demostreu que tres segments de longituds donades m, n, p poden ser les mitjanes d'un triangle si i només si es pot construir un triangle que els tinga per costats.

b) Donades tres longitud m, n, p que compleixen la condició anterior, calculeu les longituds d'un triangle que té per mitjanes m, n, p.

4.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $\angle ABC=90º$.
Siguen m i n les longituds de les mitjanes respectives als vèrtexs A, C.
a) Proveu que $\frac{1}{2}\leq\frac{m}{n}\leq 2$.
b) Si α és l'angle format per aquestes dues mitjanes, quin és el valor màxim que pot assolir α?.

5.- En qualsevol triangle rectangle s'acompleix la seguen desigualtat:
$0'4<\frac{r}{h}<0'5$ on r és el radi de la circumferència inscrita i h és l'altura sobre la hipotenusa.

6.- En una circumferència està inscrit un triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ $\overline{AB}=\overline{BC}$.
Siga un punt K qualsevol de l'arc $\overset{\frown}{AC}$.
Aleshores, $\overline{AK}\cdot\overline{KC}=\overline{BK}^2-\overline{AB}^2$.

7.- Demostreu que en un triangle rectangle $\frac{r}{R}\leq\sqrt{2}-1$ on r és el radi de la circumferència inscrita i R el radi de la circumferència circumscrita.

8.- Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, siga r el radi de la circumferència inscrita.
Siguen h_1,h_2,h_3 les 3 altures del triangle.
Aleshores, $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{r}$.

9.- Demostreu que si dues mitjanes m_a,m_b d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ són perpendiculars aleshores es té que $m_c{}^2=m_a{}^2+m_b{}^2$, on m_c és l'altra mitjana.

10.- Des del punt mig de la base $\overline{AB}$ del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ s'ha traçat una perpendicular al costat $\overline{BC}$ que talla el costat en el punt M. Siga N el punt mig del segment $\overline{DM}$. Demostreu que els segments $\overline{CN}$, $\overline{AM}$ són perpendiculars.

11.- Demostreu que la suma dels catets d'un triangle rectangle és igual o menor que la diagonal del quadrat construït sobre la hipotenusa.

12.- En l'interior d'un triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ es troba un punt P tal que $\overline{PA} = 6cm$, $\overline{PB} = 8cm$, $\overline{PC} = 10cm$. Determineu el costat del triangle i la seua àrea.

13.- En el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ sabem que $\overline{AC} : \overline{BC} = 1 : 3$, $\angle ACB = \text{arctg}\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

En el costat $\overline{AC}$ agafem un punt D tal que $\overline{AC} = \overline{CD}$.

Determineu la raó entre l'àrea del cercle circumscrit al triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ i l'àrea del cercle inscrit al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$.

14.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ rectangle $A = 90º$.
Pel punt O del catet $\overline{AB}$ tracem la perpendicular $\overline{OH}$ a la hipotenusa $\overline{BC}$.
Siga D la intersecció de la recta OH i la recta AC.
Siga E la intersecció de les rectes DB i OC.
Determineu el lloc geomètric del punt E al variar O sobre el catet $\overline{AB}$.