Problemes Geometria 43

1.- Siguen els punts K, L, M, N, respectivament, dels costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ del quadrat ABCD tal que $\angle KLA = \angle LAM = \angle AMN = 45^o$.
Proveu que $\overline{KL}^2 + \overline{AM}^2 = \overline{LA}^2 + \overline{MN}^2$.
KöMaL, B4474.

2.- En el paral·lelogram KLMN la bisectriu de l'angle $\angle MNK$ talla el costat $\overline{KL}$ en el punt Q tal que $\overline{LQ} : \overline{QK} = 1 : 3$.
Si $\angle LNQ = \alpha$ determineu la mesura de l'angle $\angle LKN$.
G.N. Medviédev. Olimpiadas y exámenes de admisión. Pàgina 30. problema 1.4.

3.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de vèrtexs $A(-3, 1)$, $B(3, -1)$, $C(2, k)$.

Determineu k a fi que el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ siga isòsceles.

4.- En una circumferència de radi R es dibuixa el diàmetre $\overline{BC}$ i la corda $\overline{BD}$.
La corda $\overline{PQ}$ perpendicular al diàmetre $\overline{BC}$ talla la corda $\overline{BD}$ en el punt M.
Si $\overline{BD} = a$, $\overline{PM} : \overline{MQ} = 1 : 3$, determineu la longitud del segment $\overline{BM}$.
G.N. Medviédev. Olimpiadas y exámenes de admisión. 1996. problema 3.6.

5.- Pel punt L d'una circumferència es dibuixen una tangent i una corda $\overline{LM}$ de longitud 5.
La corda $\overline{MN}$ és paral·lela a la tangent i és igual a 6.
Calculeu el radi de la circumferència.
G.N. Medviédev. Olimpiadas y exámenes de admisión. 1996. problema 5.4.

6.- En l'exterior d'una circumferència amb centre O, s'agafen dos punts B, C tal $\overline{OB} = \overline{OC}$. Les tangents a la circumferència que passen pels punts B i C es tallen en el punt N, $\overline{ON} < \overline{OB}$, $\overline{BN} \neq \overline{CN}$.
Si $\overline{OB} = a$, $\overline{BN} = b$ i $\overline{CN} = c$, calculeu la mesura del segment $\overline{ON}$.
Selectivitat russa 1999 5.4.

7.- Un punt P divideix la corda $\overline{BC}$ d'una circumferència de radi 12 en els segments $\overline{BP} = 8$, $\overline{CP} = 10$.
Determineu la distància mínima del punt P a la circumferència.
Selectivitat russa 2002 1.4.

8.- Siga el trapezi PQRS de costats paral·lels $\overline{QR}$, $\overline{PS}$, tal que $\overline{PS} : \overline{QR} = 3 : 1$.
Siga A del costat $\overline{PQ}$ tal que $\overline{PA} : \overline{AQ} = 2 : 5$.
Siga B del costat $\overline{RS}$ tal que $\overline{RB} : \overline{BS} = 3 : 7$.
Calculeu la raó de proporcionalitat de les àrees dels quadrilàters AQRB i PABS.
Selectivitat russa 2000 3.4.

9.- Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangle i considerem la bisectriu C, que talla en R la circumferència circumscrita.
Les mediatrius dels costats a i b tallen la bisectriu donada en P i Q.
Siguen A', B' els punts migs dels costats $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$.

Demostreu que les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{PA'R}$ i $\overset{\Delta}{QB'R}$ són iguals.
Ricardo Barroso problema 664.

10.- La raó entre els radis de la circumferència circumscrita i i inscrita al triangle $\overset{\Delta}{LMN}$ és 6.
La circumferència inscrita és tangent als costats del triangle en els punts B, C, D.

Calculeu la raó entre les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{LMN}$, $\overset{\Delta}{BCD}$.
Selectivitat russa 2002 5.8.