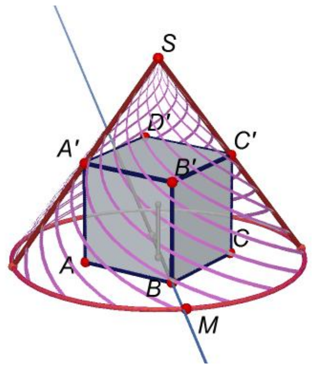
Problemes Geometria 51

1.- Suposem que la circumferència exinscrita del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ oposada al vèrtex A és tangent al costat $\overline{BC}$ en el punt A_1. Anàlogament definim el punt B_1 en el costat $\overline{AC}$ i C_1 en el costat $\overline{AB}$ utilitzant les circumferències exinscrites oposades als vèrtexs B i C, respectivament.
Suposem que el circumcentre de la circumferència que passa pels vèrtexs A_1, B_1 C_1 pertany a la circumferència circumscrita al triangle que passa pels vèrtexs A, B i C.
Demostreu que el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle.
IMO, 2013, problema 3

2.- Els costats oposats $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ del quadrilàter ABCD es tallen en els punts E i F, respectivament.
Demostreu que $\dfrac{\overline{AE}\cdot\overline{CE}}{\overline{BE}\cdot\overline{DE}} = \dfrac{\overline{AF}\cdot\overline{CF}}{\overline{BF}\cdot\overline{DF}}$.
Gúsiev 531.

3.- En una esfera de radi R està inscrita una piràmide de base un quadrat.
Una de les arestes laterals és perpendicular a la base, mentre que l'aresta lateral major forma amb la base un angle igual a α.
Determineu l'àrea lateral de la piràmide.
Gúsiev 901.

4.- El cub ABCDA'B'C'D' està inscrit en un con de radi R i altura $R\sqrt{2}$.
La base ABCD del cub està situada en la base del con, en tant que A', B', C', D' pertanyen a la superfície lateral del con.
Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{A'C'M}$, on M és el punt d'intersecció de la recta BD amb la circumferència de la base.
Gúsiev 911.



5.- En la circumferència $x^2 + y^2 - 6x = 0$, determineu el lloc geomètric dels punts migs de les cordes que passen per l'origen de coordenades.
Prova de Grau 1968. Problema 28.

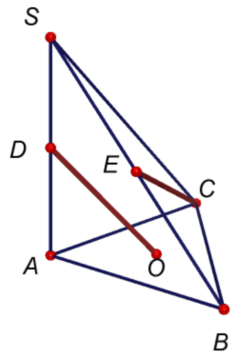
6.- Un llaç corredís fet a una corda de longitud c envolta un pilar de secció quadrada de costat m.
S'estira l'extrem de la corda en direcció perpendicular a una cara.
Calculeu a quina distància del pilar quedarà el llaç i l'angle que forma la corda amb la cara del pilar.

7.- La diagonal més curta divideix un paral·lelogram en dos triangles.
Considerem la circumferència inscrita a un dels dos triangles i la circumferència exinscrita a l'altre tangent a aquesta diagonal.
Demostreu que els quatre punts de tangència que no pertanyen a la diagonal estan alineats.
KöMaL C1187.

8.- Siga M un punt de l'esfera de radi r.
Es dibuixen tres cordes iguals $\overline{MP} = \overline{MQ} = \overline{MR}$ tal que $\angle PMQ = \angle QMR = \angle RMP = \alpha$.
Determineu la mesura de les tres cordes.

9.- En un tetraedre ABCS, $\overline{AS}$ és perpendicular a la base $\overset{\Delta}{ABC}$,
$\overline{AB} \perp \overline{AC}$,
$\overline{AS} = \overline{AB} = \overline{AC}$.

Siga D el punt mig de l'aresta $\overline{AS}$, O el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, i E el punt mig de l'aresta $\overline{BS}$.
Determineu l'angle de les rectes CE i OD.
Gúsiev problema 658.



10.- Siga el cub ABCDA'B'C'D'' d'aresta a.
Siga E el punt mig de l'aresta $\overline{AA'}$.
En la prolongació de l'aresta $\overline{AD}$ s'agafa el punt F (A entre F i D) tal que $2 \cdot \overline{FA} = \overline{AD}$.
Determineu el radi de les dues esferes que passen pels punts E i F i tangent a les cares BCC'B', CDD'C'.
Selectivitat russa juliol 1972, 2.4.