Problemes de Geometria 5

1.- Siga el segment $\overline{AB}$ i siga M el seu punt mig.
Determineu el lloc geomètric dels punts P del plànol que $\overline{PM}$ és mitja proporcional de $\overline{PA}$ i $\overline{PB}$.

2.- Demostreu que el centre d'un rectangle és el punt on la suma de distàncies als vèrtexs del rectangle és mínima.
Oposicions Catalunya 1993.

3.- Les rectes tangents a la paràbola $y^2 = 4x$ en els punts $y = 4$, $y = 6$ formen amb la recta que uneix aquests punts un triangle. Calculeu la seua àrea.
Oposicions Catalunya 1999.

4.- Els punts $A(-2,0)$ i $B(2,0)$ són vèrtexs d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ en què el vèrtex C recorre la circumferència d'equació $x^2 + y^2 - 6y = 0$. Determineu l'equació del lloc geomètric del baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ al variar C sobre la circumferència donada.
Opos Catalunya 1999.

5.- Una recta r talla l'eix d'ordenades en el punt A i l'eix d'abscisses en el punt B, de manera que la distància $\overline{AB} = 6cm$ un tercer punt C està situat sobre la recta r de manera que $\overline{BC} = 2cm$.
a) Demostreu que en moure la recta r de manera que el punt A estiga sobre l'eix d'ordenades i B sobre d'eix d'abscisses el punt C determina una el·lipse.
b) Obteniu l'equació, la distància focal, els semieixos i l'excentricitat de l'el·lipse.
Oposicions Catalunya 1998.

6.- En un rombe de diagonals d i D es construeix sobre cada costat un triangle equilàter. S'uneixen els centres dels 4 triangles equilàters obtenint un rectangle. Obteniu la diagonal d'aquest rectangle.
Oposicions Catalunya 2000.

7.- Siga la famíla d'el·lipses $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ que passen pel punt $(1,1)$. Es demana:
a) L'el·lipse d'aquesta família d'àrea mínima.
b) L'el·lipse de la família que genera un volum mínim al girar al voltant de l'eix d'abscisses.
Oposicions Catalunya 1998.

8.- Donada l'el·lipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, quin és el triangle rectangle d'àrea mínima que té els catets sobre els eixos (positius) OX OY i la hipotenusa és tangent a l'el·lipse?.
Oposicions Catalunya 2000.

9.- Donat un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i tres punts A', B', C' sobre els costats $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$, respectivament, les circumferències circumscrites als triangles $\overset{\Delta}{AC'B'}$, $\overset{\Delta}{BA'C'}$, $\overset{\Delta}{CA'B'}$ concorren en un punt M que s'anomena punt Miquel (Auguste Miquel 1883, matemàtic francés).

10.- Demostreu que la suma de les distàncies d'un punt interior a un triangle als tres vèrtexs és superior a la meitat del perímetre i inferior al perímetre.
Oposicions Catalunya 1998.