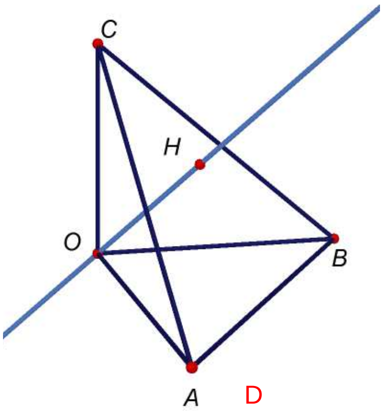
Problemes Geometria 64

1.- Siga el quadrat ABCD. Determineu tots els punts del plànol, diferents de A, B, C, D tal que $\angle APB + \angle CPD = 180^{\circ}$.
Crux Mathematicorum OC168.

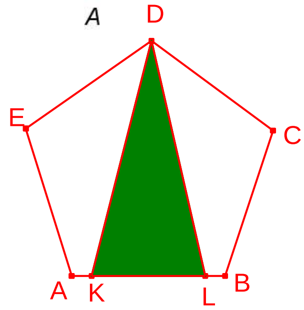
2.- Siga ABCDEFG un heptàgon regular.
Proveu que $\dfrac{\overline{AD}^3}{\overline{AB}^3} - \dfrac{\overline{AB} + 2\overline{AC}}{\overline{AD} - \overline{AC}} = 1$.
Crux Mathematicorum 3933.

3.- Siguen A, B i C tres punts alineats (en aquest ordre). Per a tota circumferència K que passa pels punts B i C siga D el punt d'intersecció de la mediatriu al segment $\overline{BC}$ i la circumferència.
Siga E el segon punt d'intersecció de la recta AD i la circumferència.
Demostreu que per a tota circumferència K la raó
Crux OC200.

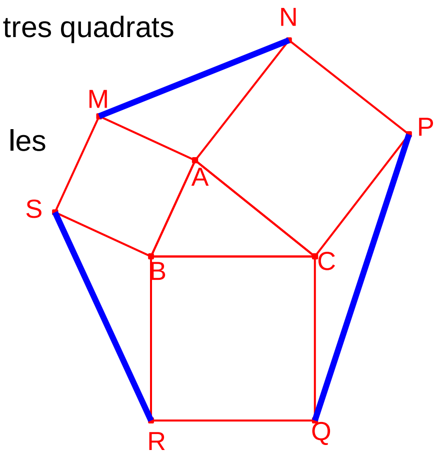
4.- Les arestes que ixen del vèrtex O del tetraedre OABC són perpendiculars dos a dos.
a) Demostreu que la projecció ortogonal H de O sobre la cara $\overset{\Delta}{ABC}$ és l'ortocentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$
b) Proveu que $\dfrac{1}{\overline{OH}^2} = \dfrac{1}{\overline{OA}^2} + \dfrac{1}{\overline{OB}^2} + \dfrac{1}{\overline{OC}^2}$.
c) Demostreu que el simètric de O respecte del baricentre del tetraedre és el centre de l'esfera circumscrita al tetraedre.



5.- Donat el pentàgon regular ABCDE de costat 1, els segments $\overline{DK}$, $\overline{DL}$ el divideixen en tres parts iguals.
Determineu la mesura del segment $\overline{KL}$.



6.- Sobre l’exterior dels costats d’un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ s’han dibuixat tres quadrats (veure figura).



Coneguts les mesures dels segments $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$, determineu les mesures dels costats del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

7.- Siga C un punt de la circumferència C_1 de diàmetre $\overline{AB}$, distint de A i B.

La perpendicular al diàmetre $\overline{AB}$ que passa per C talla el diàmetre en el punt D i la circumferència en el punt E.

La circumferència de centre C que passa per D talla la circumferència C_1 en els punts P i Q. Siga M la intersecció de $\overline{PQ}$ i $\overline{CE}$.

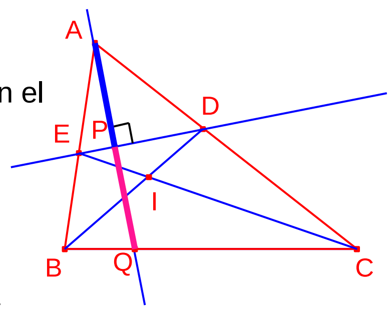
Calculeu el valor de $\dfrac{\overline{PM}}{\overline{PE}}+\dfrac{\overline{QM}}{\overline{QE}}$.

KöMaL, B4738.

8.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 60^o$. Siguen $\overline{BD}$, $\overline{CE}$ bisectrius interiors.

La recta perpendicular a la recta DE que passa per A talla la recta DE en el punt P i al costat $\overline{BC}$ en el punt Q. Proveu que $\overline{AP} = \overline{PQ}$.

Arseniy Akopyan “Geometry in figures”.



9.- En el plànol euclidià, considerem una recta d i un punt A situat a una distància $k > 0$ de la recta. Un altre punt M està construït de tal forma que $\overline{MH} = 2 \cdot \overline{MA}$, on H és la projecció de M sobre la recta d.

Denotem per Γ el lloc geomètric dels punts descrit per M.

Demostreu que Γ és una el·lipse i caracteritzeu-la, únicament, en funció de k.

Determineu en funció de k, els valors màxim i mínim de la suma $\overline{MA}+\overline{MH}$.

Prova Accés Politècnic de Louvain. Setembre 2015.

10.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ amb $C = 2\alpha$, $B = 3\alpha$.

L’altura $\overline{AD}$ i la mitjana $\overline{AE}$ són tals que $\angle DAE = \alpha$.

Demostreu que $\dfrac{a}{b} = 1+\sqrt{2\left(\dfrac{c}{b}\right)^2 - 1}$.

Crux Mathematicorum 4008.