Problemes Geometria 66

1.- En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, la bisectriu per A, la mitjana per B i l'altura per C són concurrents, i a més a més, la bisectriu per A i la mitjana per B són perpendiculars.
Si $\overline{AB} = 1$, determineu la mesura dels altres costats.
Olimpíada Espanyola 2016. Fase Local València.

2.- Determineu el perímetre mínim d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ conegudes dos altures $h_a = h_b$.

3.- Siga ω una circumferència de centre A i radi R.
Sibre la circumferència en aquest ordre es disposen els punts distints B, C, G, H, tal que G es trova sobre la mitjana prolongada a B del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i H es trova sobre l'altura prolongada del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ a partir de B. Siga X la intersecció de les rectes AC i GH. Demostre que el segment $\overline{AX}$ té longitud 2R.
Crux Mathematicorum OC233.

4.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de circumcentre O, ortocentre H i $A = 60^{\circ}$.
Suposem que la circumferència de centre Q és tangent a BH i CH i a la circumferència circumscrita al triangle. Proveu que $\overline{OH}$ i $\overline{OQ}$ són perpendiculars.
Crux Mathematicorum 4047.

5.- Siguen a, b i c les longituds dels costats del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siguen $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ les altures del triangle. Siguen $a_p = \overline{B'C'}$, $b_p = \overline{C'A'}$ i $c_p = \overline{A'B'}$ les longituds dels costats del triangle òtic. Demostreu que:
a) $a^2(b_p + c_p) + b^2(a_p + c_p) + c^2(a_p + b_p) = 3abc$.

b) $a_p + b_p + c_p \leq s$, on s és el semiperímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Crux Mathematicorum 4041.

6.- Siguen P, Q, R, S punts dels costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ del rectangle ABCD, respectivament, tal que els segments $\overline{PR}$ i $\overline{QS}$ són perpendiculars.
Proveu que els punts migs dels segments $\overline{SP}$, $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ i $\overline{RS}$ formen un rectangle semblants al rectangle ABCD.
KöMaL, C1340.

7.- L'interior d'un quadrilàter convex està dividit en quatre triangles per les seues diagonals.

Els centres de les circumferències circumscrites a quests quatre triangles formen el quadrilàter STUV.

a) Demostreu que el quadrilàter STUV és un paral·lelogram.

b) Quines propietats ha de tindre el quadrilàter ABCD a fi que STUV siga un quadrat.

8.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90º$, $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = b$.

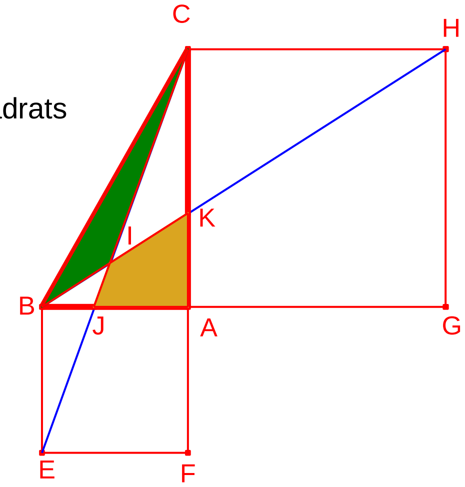
Sobre els catets i a l'exterior del triangle s'han dibuixat els quadrats AGHC i ABEF.

Siga I la intersecció dels segments $\overline{BH}$, $\overline{CE}$.

Siga J la intersecció dels segments $\overline{AB}$, $\overline{CE}$.

Siga K la intersecció dels segments $\overline{AC}$, $\overline{BH}$.

Proveu que les àrees del triangle $\overset{\Delta}{BCI}$ i el quadrilàter IJAK són iguals.



9.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i P, Q, R els peus de les bisectrius dels vèrtexs A, B, C, respectivament.

Sabent que $\overset{\Delta}{PQR}$ és un triangle rectangle en P, proveu que

a) El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és obtusangle.

b) El quadrilàter ARPQ la suma dels seus angles oposats és constant.

Oposicions Galícia 2013.

10.- Resoleu el triangle coneguts $p - a = 3$, $p - b = 4$, $r = 1$ (p el semiperímetre).

Construïu el triangle amb regle i compàs