

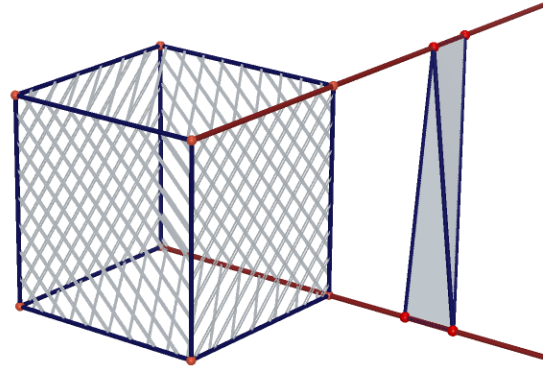
Problemes Geometria 69

1.- En un quadrilàter ABCD, tenim que $B = 150^\circ$, $C = 90^\circ$ i els costats \overline{AB} i \overline{CD} són iguals. Determineu l'angle que formen la recta BC i la recta que passa pels punts migs dels costats \overline{BC} i \overline{AD} .

2.- Dues arestes que es creuen d'un cub s'estenen.

En cada extensió s'agafa un segment d'una unitat.

On han d'estar situats els segments a fi que el volum del tetraedre format pels 4 extrems del segment siga màxim.



3.- La intersecció de les bisectrius d'un quadrilàter convex ABCD formen un quadrilàter inscripcible en una circumferència.

4.- Siguen X, Y, Z les projeccions del baricentre G d'un triangle $\triangle ABC$ sobre els costats \overline{BC} , \overline{CA} i \overline{AB} respectivament.

Siguen S i T les àrees dels triangles $\triangle ABC$ i $\triangle XYZ$, respectivament. Proveu que

$$T = \frac{4}{9} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 b^2 c^2} S^3$$

on a, b, i c són les longituds dels costats \overline{BC} , \overline{CA} i \overline{AB} respectivament.

Gaceta Espanyola. Problema 307.

5.- Els centres de dues circumferències de radis 4cm i 3cm, es tallen en els punts A i B, essent la distància entre els centres 5cm.

Les dues circumferències es tallen en els punts C i D.

Pel punt B es tracen tangents a les dues circumferències que les tallen en els punts C i D, respectivament.

Calculeu l'àrea de la figura BDACB.

Pere Puig Adam. "Curso de Geometría Métrica 2"

6.- Donada una circumferència i dos punts d'aquesta A i B, tracem dues cordes paral·leles del mateix sentit.

Suposant que les cordes mesuren 5 i $5\sqrt{3}$ metres i la distància entre les cordes és

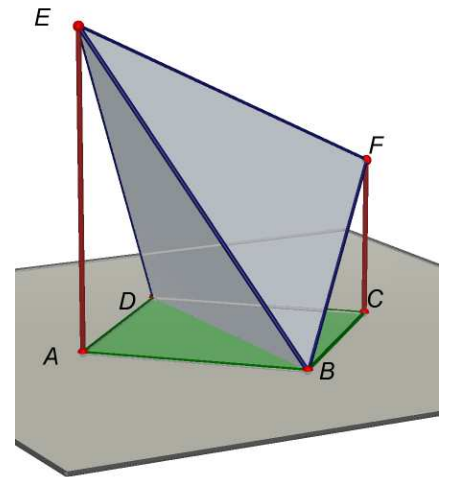
$$\frac{5}{2}(\sqrt{3} + 1)$$

metres. Determineu la longitud de la corda mitjana.

Pere Puig Adam. "Curso de Geometría Métrica 2"

7.- Donat el quadrat de costat 4 m es tracen perpendiculars al pla del quadrat pels vèrtexs A i C de $\overline{AE} = 4\sqrt{2}$, $\overline{CF} = 2\sqrt{2}$.

- Determineu l'àrea del tetraedre BDEF.
 - Determineu el volum del tetraedre anterior.
 - Suposant que el quadrat és horitzontal i Determineu el volum d'aigua que cal per omplir el tetraedre fins el vèrtex F.
- Pere Puig Adam. "Curso de Geometría Métrica 2"*



8.- Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $C = 90^\circ$.

Siguen els punts D i E de la hipotenusa tal que $\overline{AD} = \overline{AC}$ i $\overline{BE} = \overline{BC}$.

Siguen els punts P i Q en \overline{AC} i \overline{BC} , respectivament tal que $\overline{AP} = \overline{AE}$ i $\overline{BQ} = \overline{BD}$.

Siga M el punt mig del segment \overline{PQ} .

Demostreu que M és la intersecció de les bisectrius interiors del triangle $\triangle ABC$ i calculeu la mesura de l'angle $\angle AMB$.

9.- En un triangle $\triangle ABC$ es traça la bisectriu \overline{BD} .

Una circumferència passa pel vèrtex B i és tangent al costat \overline{AC} en el punt D, i talla el costat \overline{AB} en el punt F i al costat \overline{BC} en el punt E.

Si $\overline{AF} = a$, $\overline{FB} = b$ i $\overline{BD} = k$, determineu la longitud del segment \overline{EC} .

Selectivitat russa, agost 1987.

10.- Siga $\triangle ABC$ un triangle tal que el radi de la circumferència circumscrita és R i el radi de la inscrita és r i el centre de la circumferència inscrita és I.

Siguen D, E i F els centre dels cercles circumscrits als triangles $\triangle IBC$, $\triangle ICA$ i $\triangle IAB$,

respectivament. Demostreu que $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{R}{2r}$.

Crux Mathematicorum 4160.