Problemes Geometria 7

1.- En una successió de cercles de radi decreixent, cadascun d'ells és tangent exterior a la següent i als costats d'un angle recte. Determineu la raó entre l'àrea del primer cercle i la suma de les àrees dels infinits cercles.
Oposicions Catalunya 1998.

2.- Donada una circumferència de radi $R > 0$ fixa, un punt O fix i una recta tangent a la circumferència en un punt diametralment oposat a O, es traça per O una recta secant variable que talla en B a la circumferència i en C a la recta tangent. Sobre la recta secant es considera el punt A tal que $\overline{OA} = \overline{BC}$. Determineu l'equació del lloc geomètric dels punts A.
Oposicions València 2001.

3.- Construïu raonadament un triangle rectangle d'hipotenusa donada a tal que la mitjana sobre la hipotenusa siga la mitjana geomètrica dels dos catets del triangle.
Oposicions Catalunya 1997.

4.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de costats a, b, c tal que $a + b + c = 60$, $\frac{b+c}{4} = \frac{a+c}{5} = \frac{a+b}{6}$.
a) Proveu que els costats a, b, c del triangle estan en progressió aritmètica.
b) Calculeu $\sin A : \sin B : \sin C$.

5.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, proveu que si $\cos A \cdot \sin\frac{A}{2} = \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}$ el triangle és isòsceles.

6.- Donada la circumferència de centre O i radi r i un punt exterior P, determineu la distància $\overline{OP}$ en funció de r a fi que l'àrea generada pel segment de la tangent $\overline{AP}$ (A és el punt de tangència) al girar al voltant de $\overline{OP}$ siga el triple de l'àrea generada per l'arc AB al girar al voltant de $\overline{OP}$ essent B el punt de tall de la circumferència amb $\overline{OP}$.
Oposicions d'Astúries 2004.

7.- Donada la circumferència $x^2 + y^2 - 6x = 0$ i la recta $r \equiv y - 3 = 0$ es traça per l'origen de coordenades O una recta s que talla la circumferència en un punt A distint de O i a la recta r en el punt B. La paral·lela per A a l'eix OX i la paral·lela per B a l'eix OY es tallen en un punt P. Es demana:
a) Determineu el lloc geomètric del punt P quan la recta s varia passant per O
b) Estudiar el lloc geomètric i representeu-lo determinant els seus elements més notables.
Oposicions Cantàbria 2004.

8.- Un segment $\overline{AB}$ de longitud 4 es mou tenint el seu extrem A sobre la recta $r_1 \equiv y - 3x + 1 = 0$ i el seu extrem B sobre la recta $r_2 \equiv 3y + x - 7 = 0$ Determineu el lloc geomètric del punt mig del segment $\overline{AB}$.
Oposicions Andalusia 2004.

9.- Donat el rectangle ABCD amb $a = \overline{AB}$ (base) i $b = \overline{BC}$ altura i $a > b$ des de la base $\overline{AB}$ es construeix internament el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABX}$ i des de l'altura $\overline{BC}$ es construeix exteriorment un triangle equilàter $\overset{\Delta}{BCY}$. Les rectes AX i BY es tallen en el punt Z. Es demana:

a) Determina la relació entre la base i l'altura del rectangle a fi que els punts X, C Y estiguen alineats.

b) Caracteritza i calcula en aquest cas tots els elements significatius: costats, angles, mitjanes, bisectrius interiors i exteriors, radi inscrit i radi circumscrit del triangle $\overset{\Delta}{XYZ}$.

10.- Es considera una el·lipse i siga A un dels seus punts. Per cada punt X de l'el·lipse siga X' el punt mig del segment $\overline{AX}$. Determineu el lloc geomètric descrit pel punt X' quan X recorre l'el·lipse.

Determineu el lloc geomètric en el cas de l'el·lipse $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y - 140 = 0$ i $A(4,6)$.

Oposicions Madrid 2002.