

Problemes Nombres 10

1.- Siga $N^* = N \cup \{0\}$.

Definim la funció $f : N^* \times N^* \rightarrow N$ de la forma següent:

a) $f(0, y) = y + 1$.

b) $f(x + 1, 0) = f(x, 1)$.

c) $f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y))$.

Calculeu $f(2, n)$, $f(3, n)$.

2.- Determineu tots els possibles valors per al màxim comú divisor de $n^2 + 1$, $3n + 1$ on n és un nombre natural.

3.- Siga $t_n = n^2 + 20$, per a $n \geq 1$ el terme general d'una successió. Demostreu que per a tot $n \geq 1$, el màxim comú divisor de t_n i t_{n+1} ha de ser divisor de 81.

Cruz Mathematicorum M301.

4.- Siguen a, b, c tres nombres reals tal que les sumes $a + b + c$, $ab + bc + ca$ siguin nombres racionals. Demostreu que $a^4 + b^4 + c^4$ és un nombre racional si i només si abc és un nombre racional.

Cruz Mathematicorum M304.

5.- Demostreu que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ és múltiple de 7.

Fase local Olimpíada Espanyola 2008.

6.- Siga n un enter positiu. Es defineix el n nombre triangular T_n com la suma

$$T_n = 1 + 2 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Determineu tots els parells de nombres triangulars tal que la diferència siga 2008.

Cruz Mathematicorum M330

7.- Siga el nombre en base 10, $ab9b_{(10)}$, determineu a i b a fi que

$$ab9b_{(10)} - 5904_{(10)} = b98a_{(10)}.$$

Cruz Mathematicorum M326

8.- Demostreu que per a qualsevol nombre enter positiu li restem la suma de cadascuna de les seues xifres elevades a una potència imparella qualsevol (no necessàriament la mateixa), s'obté un múltiple de 3.

Cruz Mathematicorum M328.

9.- Siga n un enter positiu. Es defineix l' n -èsim nombre triangular T_n com la suma

$$T_n = 1 + 2 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Determineu totes les parelles de nombres triangulars la diferència dels quals és 2008.

Cruz Mathematicorum M330

10.- Determineu el menor nombre natural m tal que l'equació $533x + 299y = 2000 + m$ tinga solució. Resoleu-la en aquest cas.

Oposicions Aragó 2006.