

## Problemes de Nombres 18

1.- Siguen dos nombres racionals  $a$  i  $b$  tal que  $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{ab}$  és un nombre racional. Demostreu que  $\sqrt{a}$  i  $\sqrt{b}$  són nombres racionals.

*Crux CC103*

2.- Partint del fet que  $3.3025 < \log_{10} 2007 < 3.3026$ , determineu la primera xifra per l'esquerra de l'escriptura decimal de  $20007^{1000}$ .

*Crux CC105*

3.- Si  $a$  és un enter positiu, demostreu que la fracció  $\frac{a^3 + 2a}{a^4 + 3a^2 + 1}$  és irreductible.

4.- Siga un sistema lineal de dues equacions amb dues incògnites.

Els coeficients i el terme independent de la primera equació són tres nombres parells consecutius. Els coeficients i el terme independent de la segona equació són tres nombres senars consecutius. Resoleu el sistema.

5.- Siga  $p$  un nombre primer senar.

L'equació  $x^2 + px = y^2$  només té una solució entera positiva.

*KöMaL, B4705.*

6.- Resoleu l'equació  $2xy + 2x - 5y = 40$  en el conjunt dels nombres enters.

*KöMaL C1290.*

7.- Siguen  $a$ ,  $b$  i  $c$  tres nombres reals positius tals que  $a + b + c = 3$ .

Demostreu que  $\sqrt{\frac{a}{b} + \frac{1}{a}} + \sqrt{\frac{b}{c} + \frac{1}{b}} + \sqrt{\frac{c}{a} + \frac{1}{c}} \geq 3\sqrt{2}$ .

*Crux Mathematicorum 3974*

8.- Determineu els nombres naturals  $x$  i els nombres enters  $y$  primers entre si, sabent

que  $\frac{5y^2}{x^2 - xy}$  és un nombre enter.

9.- Siga  $f(n) = n^4 - 360n^2 + 400$ .

Determineu la suma de tots els valors  $f(n)$  que resulten nombres primers.

10.- Tenim cubs de dues mides diferents, cadascun amb arestes de longitud entera en cm. Les arestes dels cubs vermells són 5 cm més grans que les arestes dels cubs blaus. Per apilament 15 cubs un sobre l'altre, tenim una torre d'alçada 140 cm.

Calculeu la mesura de les arestes si la diferència entre el nombre de cubs vermells i blaus utilitzats és tan menut com siga possible.

*KöMaL, K470.*