Problemes de nombres 1

1.- Estudieu si existeix un nombre natural n tal que 2^2 divideix a n, 3^2 divideix a n+1, 4^2 divideix a n+2.

2.-

a) Comproveu que $2^5 \cdot 9^2 = 2592$

b) Estudieu si és possible que $2^5 \cdot a^b = (25ab)_{10}$, per a valors distints dels de l'apartat anterior.

3.- Siguen a i b dos nombres naturals.
Calculeu el nombre de múltiples de b que apareixen en la successió $a, 2a, 3a, \ldots\ldots, ba$

4.- Determineu tots els parells de nombres naturals (a,b) tals que
$\mathrm{mcd}(a,b) = 18, \quad \mathrm{mcm}(a,b) = 540$

5.- Determineu una terna de nombres enters (x,y,z) que complesca
$\mathrm{mcd}(198, 288, 512) = 198x + 288y + 512z$

6.- Demostreu que el nombre real $\log_2 3$ és irracional.

7.- Demostreu que l'última xifra decimal de $2^{2^n} + 1$ és 7 per a tot nombre natural n major o igual que 2.

8.- Demostreu que l'equació $x^2 + y^2 = x^2 y^2$ no té solució en els nombres naturals.

9.- Sense efectuar la multiplicació, calculeu la xifra a en el producte en base 10.
$89878 \cdot 58965 = 5299a56270$

10.- Utilitzant la congruència $19^2 \equiv 2^2 (\text{mòd} 119)$ descomponeu en factors primers el nombre 119.

11.- Calculeu el residu de la divisió del producte $2^{50} \cdot 41^{65}$ entre 7.

12.- Determineu totes les solucions enteres de l'equació diofàntica
$101x + 102y + 103z = 1$

13.- Determineu les solucions enteres del sistema següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 31 \\ x + 2y + 3z = 41 \end{cases}$$

14.- Determineu tots el nombres naturals m tals que $1066 \equiv 1776 (\text{mòd } m)$

15.- Demostreu que si n és un nombre natural aleshores $4^n \equiv 1 + 3n (\text{mòd} 9)$