

## Problemes de Nombres 21

1.- Determineu el menor enter positiu  $n$  tal que  $5^n + n$  és divisible per 31.

*Crux Mathematicorum CC224.*

2.- L'equació  $x^2 + px + q = 0$  té arrels enteres no nul·les.

Proveu que  $p^2 + (q - 1)^2$  és un nombre compost.

*KöMaL, C1376.*

3.- Demostreu que per qualsevol  $n$  enter,  $n^3 - 9n + 27$  no és divisible per 81.

4.- Siguen  $a$  i  $b$  enters tals que  $a^2 + b^2$  és divisor de  $2a^3 + b^2$ .

Demostreu que  $2a^3b^2 + ab^2 + 3b^4$  és divisible per  $a^2 + b^2$ .

*Crux Mathematicorum 4132.*

5.- Proveu que

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2016}+\sqrt{2017}} < \sqrt{2017}.$$

*KöMaL, C1382.*

6.- Siga  $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  una progressió geomètrica de nombres reals.

La suma dels  $n$  primers termes es denota per  $S_n$ .

Si  $S_{10} = 10$  i  $S_{30} = 70$ , determineu el valor  $S_{40}$ .

*Crux Mathematicorum CC227.*

7.- Un magatzem té a la venda objectes de 10, 25, 50 i 70 cèntims.

Jaume compra 40 objectes i disposa de 7 euros. Quin és el major nombre possible d'objectes de 50 cèntims que haurà fet en la compra?.

*Crux Mathematicorum CC229.*

8.- Determineu la base  $x$  de l'equació  $2016_{(x)} = x^3 + 2x + 342$ .

*KöMaL, C1389.*

9.- Des del seu naixement, Martí aconsegueix un nombre de baralles de 32 cartes per al Nadal com el nombre de dies de Nadal que ha vist, incloent l'actual. Durant un any, en el segon dia de Nadal (és a dir, en el seu aniversari) va decidir construir un castell de les cartes que havia rebut. El nivell més inferior constava de 216 targetes, i cada nivell consecutiu té 8 cartes menys que el nivell de sota. Quina edat tenia Martí si se les va arreglar per construir 16 nivells?.

*KöMaL, C1391*

10.- Determineu els parells d'enters positius  $x$  i  $y$  que satisfan l'equació:

$$4x^2 + 3y^2 - 7xy - 6x + 5y = 0.$$

*Crux Mathematicorum 4175.*