Problemes Nombres 6

1.- Demostreu que $\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+.........+\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{4}$ per a tot n natural.
Oposicions València 2003.

2.- Siguen p, q, r tres nombres naturals tals que la suma $p^3+q^3+r^3$ és múltiple de 9. Demostreu que almenys un dels 3 nombres p, q, r és múltiple de 3.
Oposicions Madrid 2002.

3.- Considerem la taula:

1						
2,	3,	4				
3,	4,	5,	6,	7		
4,	5,	6,	7,	8,	9,	10

Demostreu que la suma de cada fila és un quadrat d'un nombre imparell.

4.- Proveu que $N=n^3+3n^2+5n+3$ és múltiple de 3 per a tot n natural.

5.- Demostreu que si el nombre natural $p=abc_{(10}$ és divisible per 37, aleshores els nombres $q=bca_{(10}$, $r=cab_{(10}$ són divisibles per 37.

6.- Demostreu la següent desigualtat:

$\operatorname{tg} n\alpha > n\cdot \operatorname{tg}\alpha$, si $0<\alpha<\frac{\pi}{4(n-1)}$ i n és un natural $n\neq 1$.

7.- Demostreu que la fracció $\frac{21n+4}{14n+3}$ és irreductible per a qualsevol n natural.

8.- Siguen p, q dos nombres naturals tal que
$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+........-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}$.
Demostreu que p és divisible per 1979.

9.- Determineu el major nombre natural n a fi que $(n+1)(n^4+2n)+3(n^3+57)$ siga divisible per n^2+2.

10.- Siguen $a_1, a_2, a_3,......, a_n$ els termes d'una progressió aritmètica s'acompleix:
$\frac{1}{a_1\cdot a_2}+\frac{1}{a_2\cdot a_3}+\frac{1}{a_3\cdot a_4}+....+\frac{1}{a_{n-1}\cdot a_n}=\frac{n-1}{a_1\cdot a_n}$.