

Problemes Nombres 8

1.- Siga $a_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Demostreu que $\forall n \in \mathbb{N}$, a_{n+3} és congruent a_n mòdul 7.

b) Determineu els valors de n que verifiquen que a_n és divisible per 7. Apliqueu el resultat obtingut per esbrinar si els nombres que en sistema de numeració de base 2 s'escriuen $1110_{(2)}$, $1010100_{(2)}$, i $1001001000_{(2)}$ són divisibles per 7.

Oposicions Extremadura 2006.

2.- Proveu que $(27^4)^9 - (25^3)^6$ és múltiple de 37. Oposicions Castella la Manxa 2006.

3.- Donada la següent configuració de nombres naturals

			1			
		2	3	4		
	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16
....

a) Determineu la suma S_n dels nombres situats en la n -èsima fila.

b) Calculeu $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{S_{n+1}} - \sqrt[3]{S_n})$. Oposicions La Rioja 2006.

4.- Siguen $k, p, n \in \mathbb{N}$, amb $0 \leq k \leq p \leq n$.

a) Demostreu que $\binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k} \binom{n}{p}$.

b) Demostreu que $\binom{n}{0} \binom{n}{p} + \binom{n}{1} \binom{n-1}{p-1} + \binom{n}{2} \binom{n-2}{p-2} + \dots + \binom{n}{p} \binom{n-p}{0} = 2^p \binom{n}{p}$.

Oposicions Andalusia 2006.

5.- Proveu:

a) $n! < n^n$ quan $n \geq 2$.

b) $2^n < n!$ quan $n \geq 4$.

c) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$ quan $n \geq 1$.

6.- Ens donen una funció f que, per tot nombre natural n , compleix:

$$\begin{cases} f(1) = 2006 \\ f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) = n^2 \cdot f(n) \end{cases}$$

Trobeu $f(2006)$ i raoneu la resposta. Olimpíada Anglaterra.

7.- Siga S un conjunt amb n elements. Proveu que el nombre de parelles (A, B) on A i B són subconjunts de X , A és subconjunt de B i $A \neq B$ és igual a $3^n - 2^n$.

Oposicions Balears 2006.

8.- Determineu les solucions naturals per a m, n de l'equació:

$$n! + 1 = (m-1)^2. \text{ Olimpíada Espanyola 2002. Fase Local València.}$$

9.- El nombre N és de la forma $10 + \text{múltiple de } 19$. Demostreu que no pot ser ni quadrat i cub perfecte. Societat Romanesa de Matemàtiques.

10.- Siguen p i q nombres primers tals que $\frac{p^2 + q^2}{p + q}$ és un nombre enter, aleshores

$$p = q.$$