

Problemes de còniques

1.- Classifiqueu les següents còniques i determineu l'equació reduïda.

a) $x^2 + 2xy + 2y^2 - x + 2y = 0$. b) $x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 6y + 1 = 0$.

c) $x^2 + 2xy + y^2 + x - 2y + 1 = 0$.

2.- Donada l'el·lipse $2x^2 - xy + y^2 - x - 2 = 0$, determineu:

a) El centre. b) Els eixos. c) Els focus.

d) La recta tangent a l'el·lipse en el punt $A\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

3.- Determineu l'equació de la cònica que passa pels punts:

$O(0,0)$, $P(1,1)$, $Q(3,1)$, $R(5,-1)$, $S(2,-2)$.

Determineu l'equació reduïda de la cònica. Calculeu la seua excentricitat.

4.- Donat un triangle $\triangle ABC$ determineu el lloc geomètric de l'ortocentre quan A recorre una recta no paral·lela al segment \overline{BC} .

5.- Sigui \overline{AD} una ceviana qualsevol del triangle $\triangle ABC$ (D pertany al costat \overline{BC}).

Amb centre en D, construïm dues circumferències de radi respectivament \overline{DB} i \overline{DC} que denotarem per C1 i C2, respectivament.

Siguin E i F, els punts on les circumferències C1 i C2 interseccionen amb la

circumferència C3 circumscrita al triangle $\triangle ABC$. Proveu que:

a) Els punts E, F i D estan alineats.

b) Determineu el lloc geomètric descrit pels punts E, F al variar D al llarg del costat \overline{BC} .

6.- Donada l'el·lipse d'equació $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, determineu el triangle equilàter circumscrit a l'el·lipse que té un costat tangent a l'el·lipse en el punt $(0,-3)$.

7.- Siguen M, N els punts migs de dos costats qualssevol del triangle $\triangle ABC$.

Sigui X un punt variable escollit de l'altre costat.

Es demana:

a) Demostrar que el triangle $\triangle XMN$ té un àrea que no depèn del punt X, i que és $\frac{1}{4}$ de l'àrea del triangle $\triangle ABC$.

b) Determinar el lloc geomètric descrit pels baricentres dels triangles $\triangle XMN$ quan X varia sobre el costat en el qual està situat.

8.- Siga una circumferència de radi b centre $(b,0)$. Siga $O(0,0)$.

Siga la recta $r \equiv x = a \quad 0 \leq a \leq 2b$.

Siga P un punt de la circumferència.

Siga la recta s que passa pels punts O, P .

Les rectes r i s es tallen en el punt R .

Siga la recta t perpendicular a r que passa per P , que talla la recta r en Q .

Siga la recta n que perpendicular a r que passa per R .

El segment \overline{OQ} talla la recta n en el punt N .

Determineu el lloc geomètric del punt N al variar P sobre la circumferència.

9.- La corba intersecció de l'esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 4 = 0$ amb el pla
 $x + y - z - 1 = 0$ és projecta ortogonalment sobre el pla coordinat XOY .

Estudieu la cònica projecció. Determineu la seua equació reduïda.

10.- Siguen els punts $A(2,0)$, $B(0,-1)$, $C(1,1)$, $D(-1,0)$, $E(1,-1)$.

Determineu l'equació de la cònica que passa per aquests punts. Classifiqueu-la i doneu la seua equació reduïda.